



# APPLICATION DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES A NOMBRE ELEVE DE DEGRES DE LIBERTE

Jean-Baptiste Leblond

Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Pierre et  
Marie Curie (Paris 6)

Institut Universitaire de France  
Académie des Sciences



# SOMMAIRE

1. Introduction
2. Premier exemple : un modèle du second gradient pour la rupture ductile
3. Second exemple: simulation numérique du soudage ponctuel par friction-malaxage



# 1. INTRODUCTION

L'objet de l'exposé n'est pas de développer de grandes théories, mais simplement de montrer, grâce à deux exemples, les potentialités de développement des éléments finis pour la simulation de problèmes complexes, impliquant des **modèles à nombre élevé de degrés de liberté**.



## 2. PREMIER EXEMPLE : UN MODELE DU SECOND GRADIENT POUR LA RUPTURE DUCTILE

Gologanu, Leblond, Perrin et Devaux ont défini en 1997 un modèle du second gradient pour la rupture ductile, étendant le modèle classique de Gurson.

Le nouveau modèle a été obtenu en étendant l'analyse-limite de Gurson, effectuée pour des conditions aux limites de taux de déformation homogène (vitesse fonction linéaire des coordonnées), à des conditions de taux de déformation inhomogène (vitesse fonction quadratique des coordonnées).



L'idée était de tenir compte ainsi de la possibilité de champs mécaniques macroscopiques variant significativement à l'échelle du volume représentatif.

Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$P^{(i)} \equiv - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{D}) dV$$

**M** : tenseur des moments du troisième ordre



## Critère de Gurson généralisé :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, f) \equiv \frac{\sigma_{eq}^2 + Q^2 / b^2}{\bar{\sigma}^2} + 2p \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - p^2 = 0$$

$Q^2$  : forme quadratique des composantes de  $\mathbf{M}$

$b$  : distance « microstructurale » (demi-espacement moyen des cavités)



Mise en œuvre numérique : on transforme le modèle du second gradient en un **modèle à nombre plus élevé de degrés de liberté** :

1. On introduit une nouvelle variable nodale **W**.
2. On modifie l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs en :

$$P^{(i)} \equiv - \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \nabla \mathbf{W} + \mathbf{P} : (\mathbf{W} - \mathbf{D})] dV$$

3. On impose la quasi-coïncidence de **D** et **W** par l'intermédiaire d'une loi d'élasticité avec raideur élevée (pénalisation).



Avantage : on évite ainsi les éléments de classe  $C^1$ .

Inconvénient : la résolution est alourdie par les degrés de libertés supplémentaires.

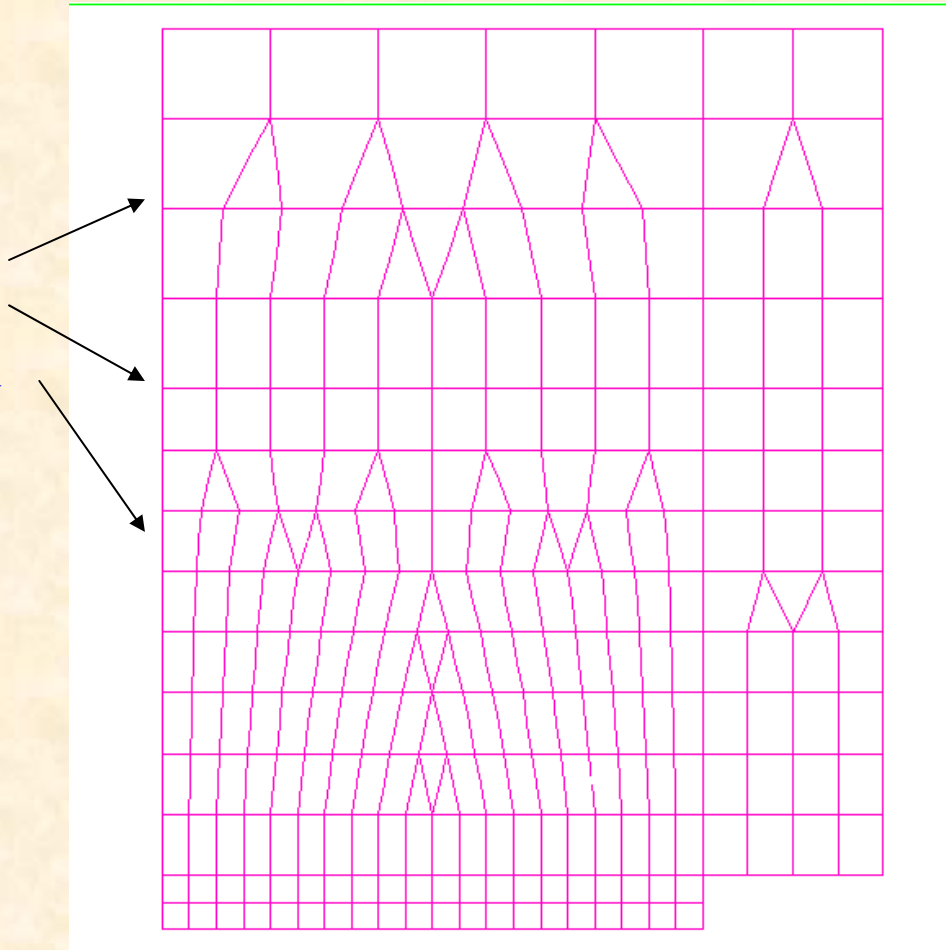
Cette procédure est l'équivalent exact, dans un autre contexte, de la transition de la théorie des plaques de Love-Kirchhoff à celle de Reissner-Mindlin.



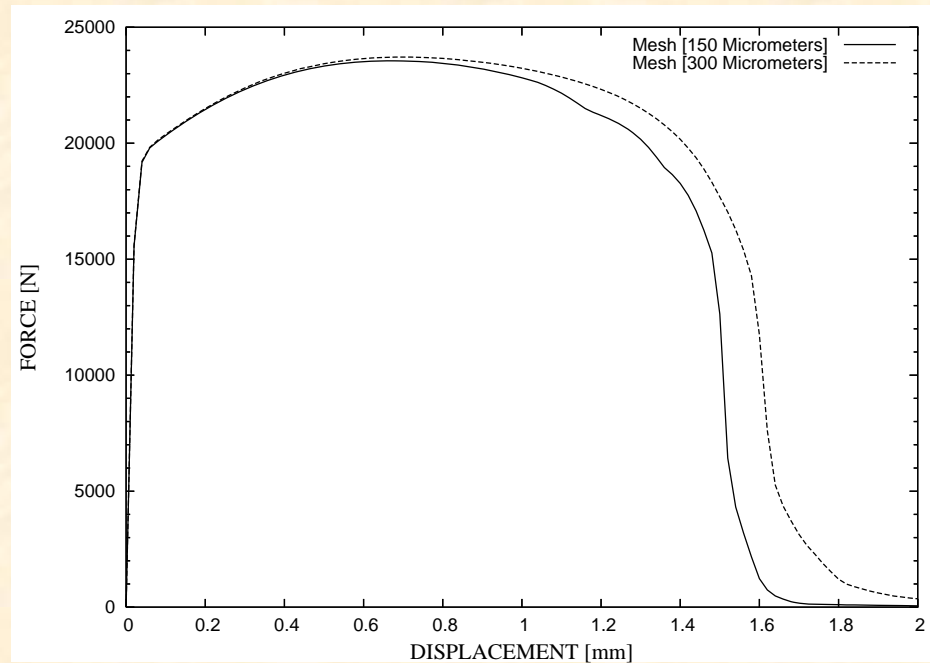


# Effet du maillage : essai de traction d'une éprouvette axisymétrique (avec Enakoutsa)

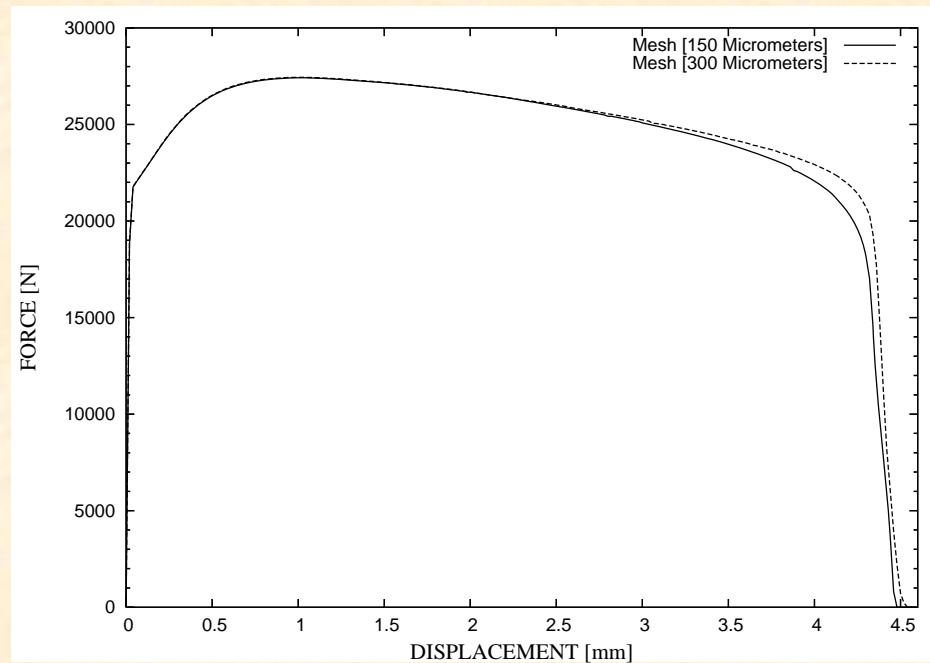
Axe de révolution



# Modèle de Gurson



# Modèle GLPD

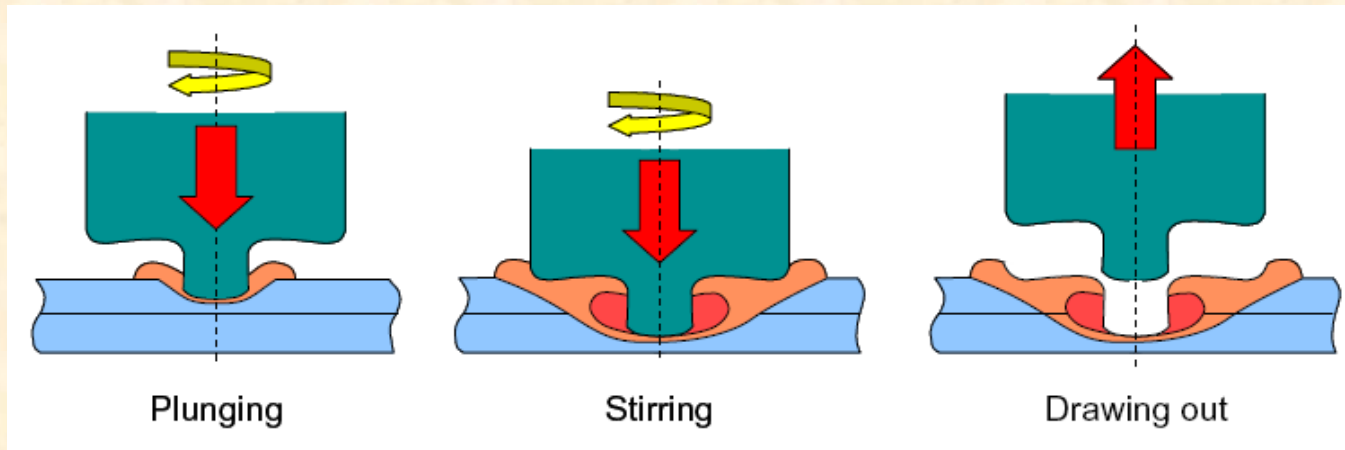
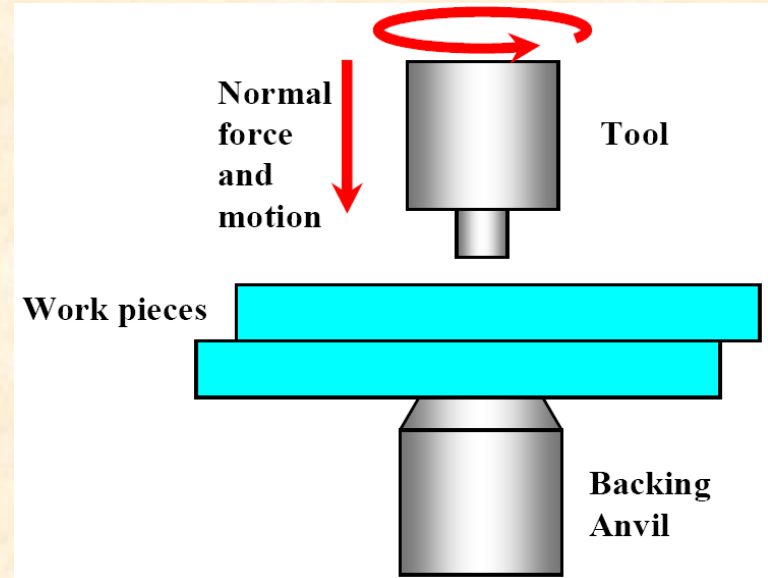
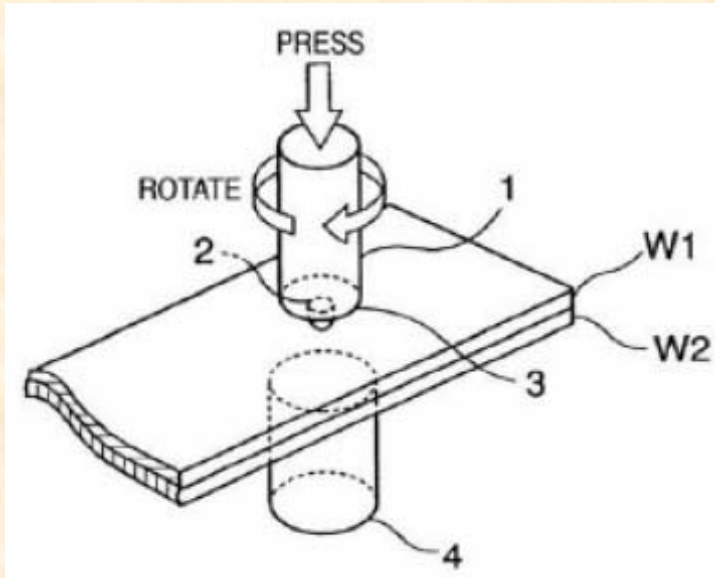




Une difficulté majeure est la lenteur de la convergence et l'importance du temps de calcul.

**Bergheau** a récemment proposé, pour résoudre ce problème, une méthode astucieuse pour **éliminer les degrés de liberté  $W_{ij}$  dans le système d'équations, afin de ne conserver que les degrés de liberté habituels.**

# 3. SIMULATION NUMERIQUE DU SOUDAGE PONCTUEL PAR FRICTION-MALAXAGE





## Difficultés :

1. L'échauffement dû au travail plastique est très important. Pour en tenir compte il faut **complètement coupler résolutions thermique et mécanique**. De plus la partie pâteuse est un fluide quasi-incompressible qui nécessite de traiter la pression comme une variable supplémentaire. Il faut donc considérer simultanément comme variables la vitesse, la température et la pression.
2. Une approche purement lagrangienne serait très malcommode car elle nécessiterait un très grand nombre de remaillages de la partie pâteuse.



3. Une approche purement eulérienne ne permettrait pas de suivre le mouvement du bord de la tôle ni celui de la surface libre de la partie pâteuse.

Solution adoptée (avec Heuzé et Bergheau) :

Approche ALE dans laquelle les nœuds suivent le mouvement de la partie solide mais pas celui de la partie pâteuse.

Degrés de liberté : déplacement, vitesse, température, pression.



## Equations écrites dans la zone pâteuse :

1. Résolution élastique fictive pour le calcul des déplacements (placement des nœuds)
2. Equations de la dynamique
3. Equation de la chaleur
4. Incompressibilité



## Equations écrites dans la zone solide :

1. Equations de la dynamique
2. Liaison entre déplacements et vitesses (les nœuds suivent le mouvement du solide)
3. Equation de la chaleur
4. Incompressibilité plastique





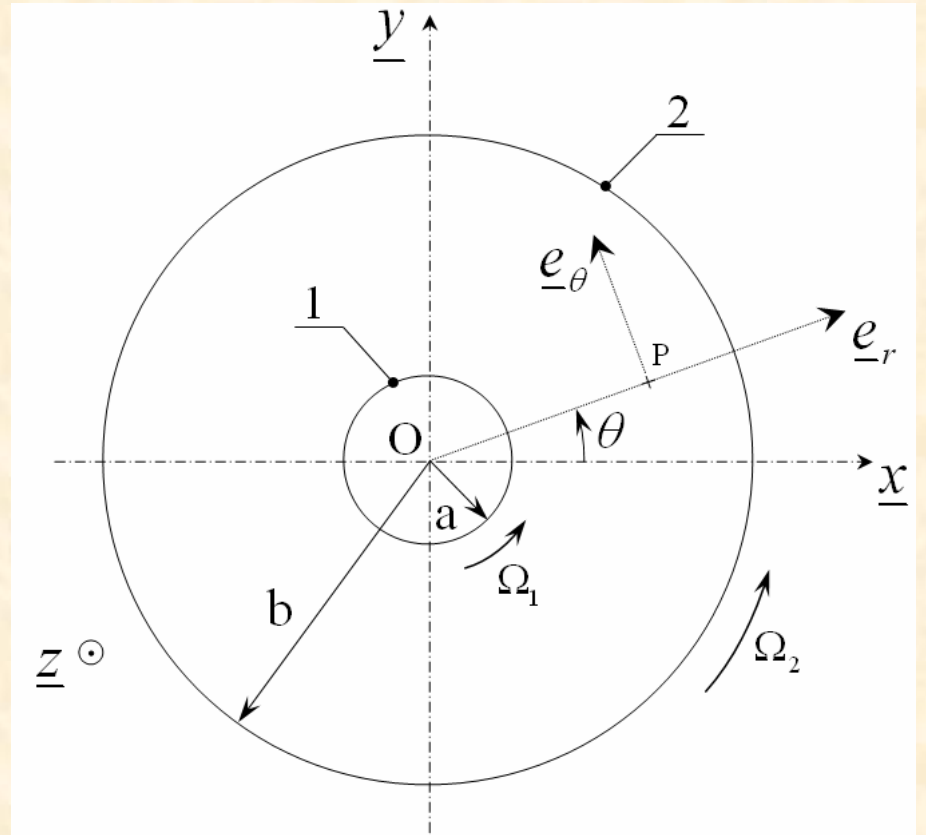
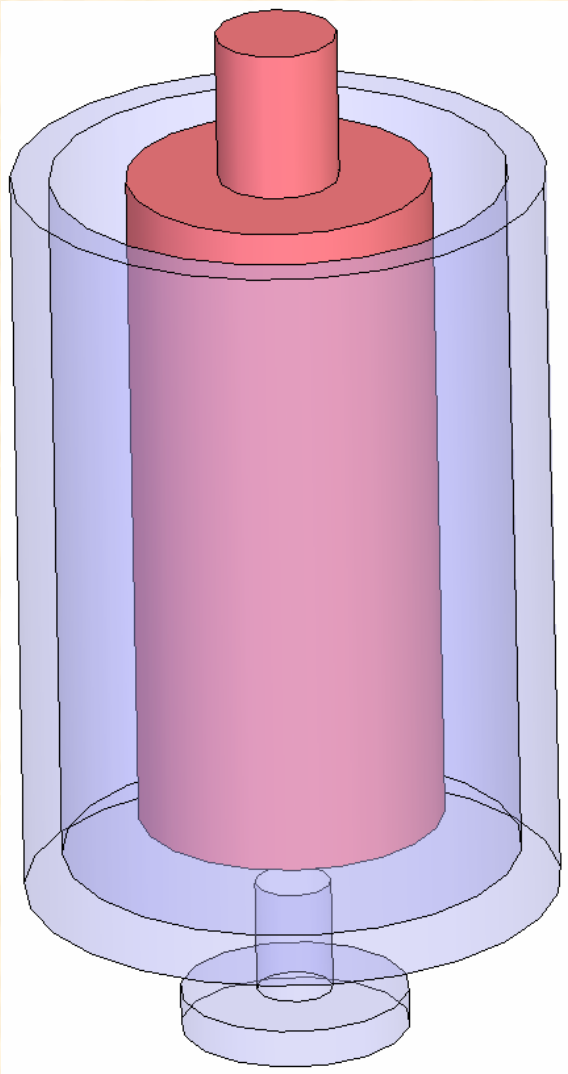
Puisque le traitement numérique distingue les zones pâteuse et solide, **on les distingue aussi par leurs lois de comportement**, respectivement « fluide » (visqueux non-linéaire) et « solide » (viscoplastique).

Au moins dans un premier temps, l'interface entre les zones n'est pas maillé. Le critère d'appartenance d'un point à une zone donnée peut être la valeur de sa température, de son taux de déformation, etc.



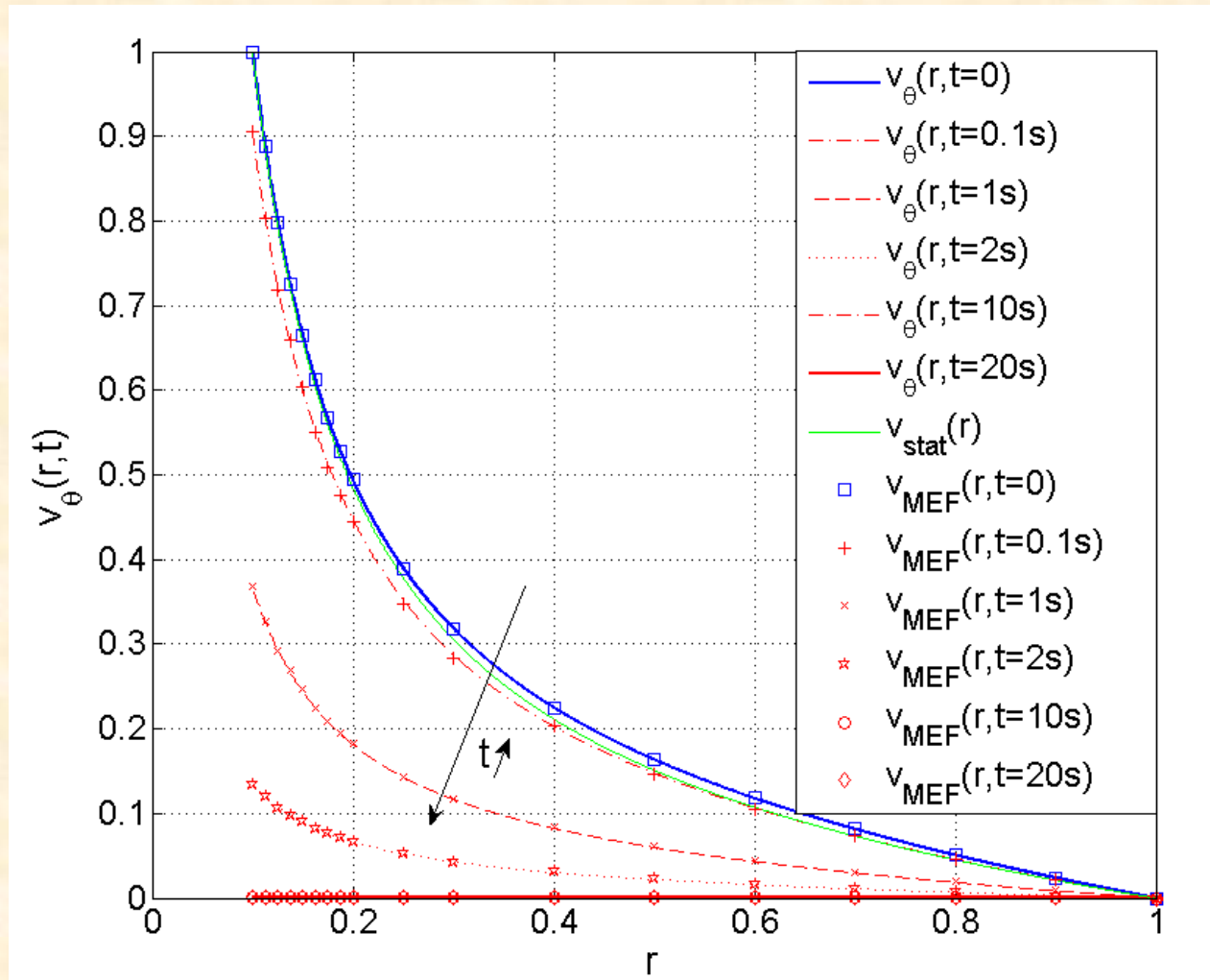
## Test numérique de l'élément de fluide couplé développé :

Écoulement de Couette entre deux cylindres. **La solution analytique du problème thermomécanique peut être obtenue** en calculant la vitesse indépendamment de la température, puis la température une fois connu le terme source provenant de la dissipation plastique.



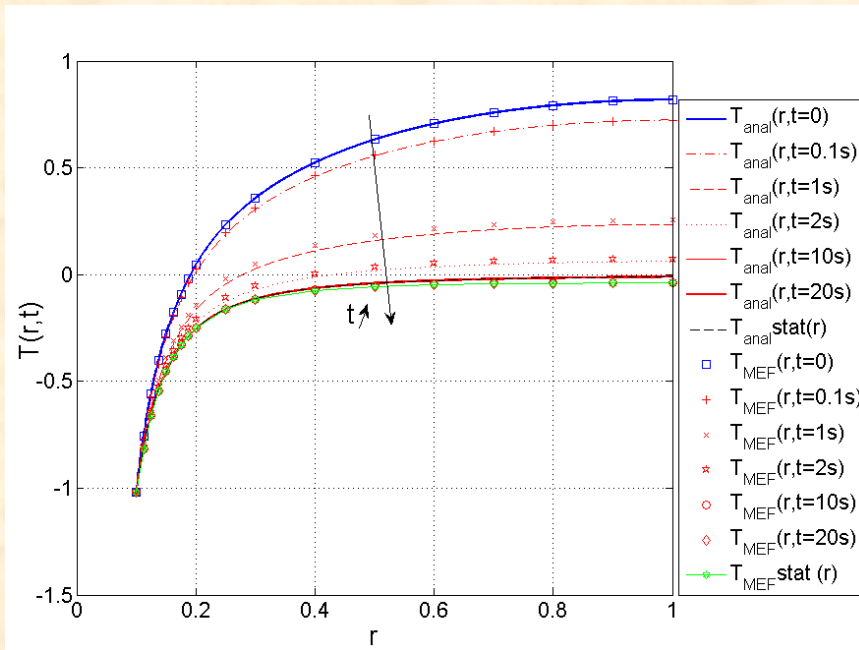


# Champ de vitesse pour un problème mécanique instationnaire :

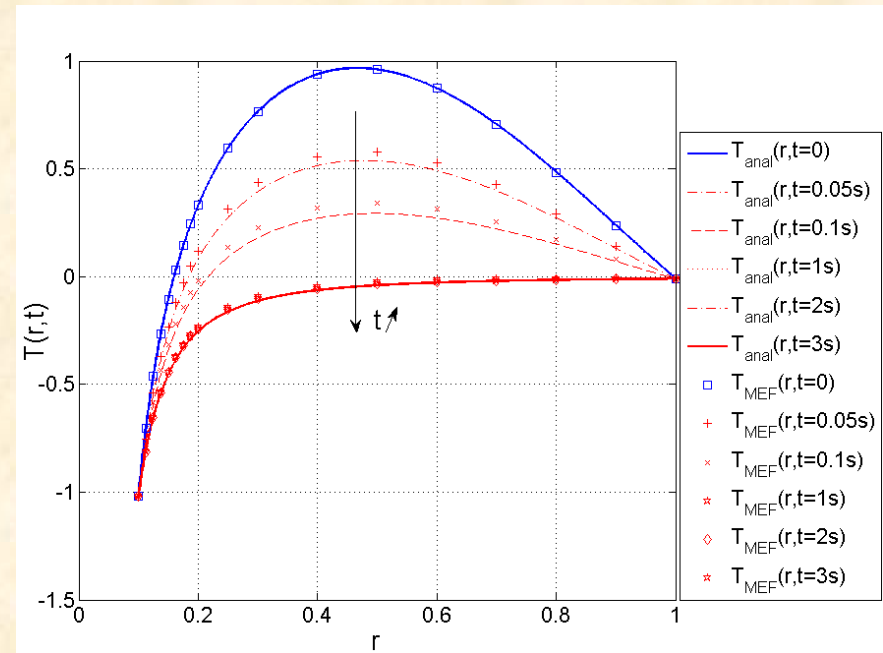




# Champ de température pour des problèmes mécaniques stationnaires/thermiques instationnaires :



Température imposée à gauche, flux nul à droite



Température imposée à gauche et à droite



**MERCI DE VOTRE PATIENCE ET DE  
VOTRE ATTENTION!**