Estimateur d’erreur en résidu

Résumé

L’estimateur d’erreur en résidu permet d’estimer l’erreur de discrétisation due à la méthode des éléments finis sur les éléments d’un maillage 2D ou 3D. C’est un estimateur d’erreur explicite faisant intervenir les résidus des équations d’équilibre et les sauts des contraintes normales aux interfaces, contrairement à l’estimateur de Zhu-Zienkiewicz, qui utilise une technique de lissage des contraintes à posteriori [R4.10.01] et [bib5].

Cet estimateur est implanté dans *Code_Aster* en élasto-plasticité 2D et 3D.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

L'estimateur d'erreur en résidu a été développé en 1993 par Bernardi-Métivet-Verfurth [bib1]. C'est un estimateur d'erreur explicite faisant intervenir les résidus des équations d'équilibre (d'où son nom). Il s'applique à des problèmes elliptiques (Poisson, Stokes, ou élasticité linéaire) en dimension 2 ou 3. Ces problèmes sont supposés discrétisés par éléments finis associés à une triangulation régulière.

Historiquement, le premier estimateur d'erreur explicite relatif aux défauts d'équilibre est dû à Babuska et Rheinbolt [bib2] pour les problèmes 1D avec des éléments linéaires. Gago a étendu cet estimateur au 2D et a ajouté aux formules les sauts de traction aux interfaces des éléments [bib3] et [bib4]. De nouveaux estimateurs ont été proposés ensuite, dans lesquels les défauts de traction surfacique aux frontières du domaine ont également été pris en compte ainsi qu'une amélioration de l'estimation des sauts inter-éléments donnant des résultats plus fiables.

On s'intéresse ici à l'estimateur en résidu appliqué au cas de l'élasticité linéaire. Le but visé est, à l'issue d'un calcul élastique, de déterminer la carte d'erreur sur le maillage en vue éventuellement d'adapter celui-ci (par raffinement et/ou déraffinement) ou simplement pour information. L'adaptation peut se faire par chaînage avec le logiciel de découpage Homard.

2 Formulation de l'estimateur en résidu

Soit Ω un ouvert de R^n, $n=2$ ou 3, de frontière Γ, et T une triangulation régulière de Ω.

En élasticité linéaire, le problème continu s'écrit :

trouver (u,σ) tels que :

$$\begin{cases} div\,\sigma+f=0 & \text{dans } \Omega \\ u=u_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma.\mathbf{n}=g_N & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Γ_D est la frontière de Dirichlet du maillage
u_D est le déplacement imposé sur cette frontière
Γ_N est la frontière de Neumann
$\mathbf{n}$ la normale unitaire à Γ_N

g_N est le chargement appliqué sur cette frontière ; il peut être continu ou discrétisé.
f est une force de type volumique (pesanteur, rotation) ; elle peut être continue ou discrétisée.

σ_h est la contrainte obtenue par la résolution du problème discret :

$$\begin{cases} div\,\sigma_h+f=0 & \text{dans } \Omega \\ u_h=u_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma_h.\boldsymbol{n}=g_N & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec la relation $\sigma_h = \mathbf{DB}\, u_h$ où :

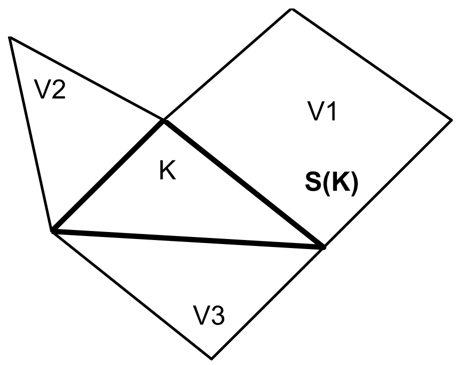
$\boldsymbol{D}$ est la matrice de Hooke
$\boldsymbol{B}$ est l'opérateur linéarisé des déformations

Si K désigne un élément courant du maillage, l'estimateur d'erreur (noté $\eta(\Omega)$) est défini comme étant la moyenne quadratique des indicateurs d'erreur locaux, notés $\eta(K)$:

$$\eta(\Omega) = \left[\sum_{K \in T} \eta(K)^2 \right]^{1/2}$$

L'indicateur par résidu local

L'indicateur est composé de trois termes ; le premier représente le résidu de l'équation d'équilibre sur chaque maille, le deuxième terme le saut des contraintes normales sur les interfaces, le troisième terme l'écart entre les contraintes normales et le chargement imposé sur Γ_N si l'élément intersecte Γ_N .



K :	Elément courant où l'on souhaite calculer l'erreur,
V1 à V3 :	Eléments ayant un bord commun avec l'élément courant,
S(K) :	Ensemble des bords de l'élément courant ayant des voisins.

Figure 2-a : Eléments internes à un maillage

- le premier terme de l'estimateur est la norme L^2 du résidu de l'équation d'équilibre sur la maille K, multiplié par h_K qui est, soit le diamètre du cercle circonscrit pour un élément fini triangulaire, soit la diagonale maximale pour un quadrangle,
- le deuxième terme est l'intégrale, sur $S(K)$ défini [Figure 2-a], des sauts de contraintes normales intégrés sur chaque bord F de l'élément qui possède un voisin, et multipliés par la racine de h_F , qui est la longueur de l'arête F,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Γ_N : Frontière de Neumann

g_N : Force appliquée sur la frontière de Neumann

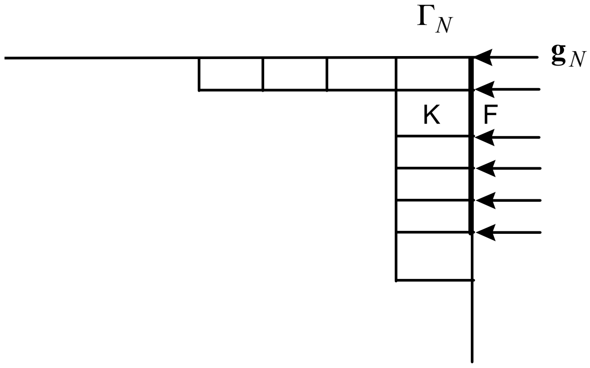


Figure 2-b : Eléments situés sur la frontière d'un maillage

- le troisième terme est l'intégrale, sur l'intersection de chaque bord F des bords ∂K de l'élément courant K avec la frontière de Neumann Γ_N, des sauts entre les contraintes normales de l'élément et la force de Neumann g_N, multipliée par la racine de h_F, longueur de l'arête F.

On a donc la formule suivante pour l'estimateur en résidu :

$$\eta(K)=h_K\|f+div\,\sigma_h\|_{L^2(K)}+\frac{1}{2}\sum_{F\in S(K)} h_F^{1/2}\|[\sigma_h.n]\|_{L^2(F)}+\sum_{F\,\subset\,\partial K\,\subset\,\Gamma_N} h_F^{1/2}\|g_N-\sigma_h.n\|_{L^2(F)} \quad \text{éq 2-1}$$

Pour le choix des différents termes de [éq 2-1], on renvoie à [bib1].

3 Propriétés de l'estimateur en résidu

On note $\eta_{EX}(K)$ l'erreur exacte $\|u-u_h\|_{H^1(K)}$ sur l'élément K (inconnue a priori)

et $\eta_{EX}(\Omega)$ l'erreur exacte globale $\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$

On a alors les propriétés suivantes ([bib1]) :

- quelque soit l'élément K, l'erreur élémentaire $\eta(K)$ est majorée par l'erreur locale exacte (multipliée par une constante indépendante de la triangulation),

  soit $\forall K \quad \eta(K)\leq C_1\times\eta_{EX}(K)$

- l'erreur globale exacte est majorée par l'erreur estimée globale $\eta(\Omega)$ (multipliée par une constante indépendante de T)

  soit $\eta_{EX}(\Omega)\leq C_2\times\eta(\Omega)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les constantes C_1 et C_2 dépendent a priori du type d'élément fini et des conditions aux limites du problème. Kelly et Gago [bib3] ont proposé en 2D une constante C_2 ne dépendant que du degré p du polynôme d'interpolation utilisé :

$$C_2=\left(\frac{1}{24\,p^2}\right)^{1/2} \text{soit} \quad C_2=\frac{1}{2p\sqrt{6}} \text{ pour les TRIA3 et QUAD4 } (\text{degré } 1)$$

$$C_2=\frac{1}{4p\sqrt{6}} \text{ pour les TRIA6 et QUAD8 } (\text{degré } 2)$$

Pour le 3D, on ne dispose pas d'évaluation de la constante. On peut néanmoins dire que l'erreur estimée globale surestime l'erreur exacte globale dans tous les cas. Ce résultat n'est pas forcément vrai au niveau local.

4 Implantation dans *Aster*

L'estimateur en résidu est implanté en 2D et 3D sur tous les types d'éléments. Il est calculé par la commande `CALC_ERREUR` en activant l'option `'ERME_ELEM'`.

Cette option calcule sur chaque élément :

- l'erreur absolue $\eta(K)$ (voir [éq 2-1]),
- la norme du tenseur des contraintes $\|\sigma_h\|_{L^2(K)}$ qui sert à normer l'erreur absolue,
- l'erreur relative $\eta_{rel}(K)=100\times\dfrac{\eta(K)}{\sqrt{\eta(K)^2+\|\sigma_h\|^2_{L^2(K)}}}$.

Nota :

> *Cette définition de l'erreur relative implique que dans les zones où les contraintes sont très faibles, l'erreur relative peut être importante et non significative. C'est alors l'erreur absolue qu'il faut considérer.*

Elle calcule également au niveau global :

- l'erreur absolue $\eta(\Omega)=\left[\sum_{K\in T}\eta(K)^2\right]^{1/2}$,
- la norme globale du tenseur des contraintes $\|\sigma_h\|_{L^2(\Omega)}=\left[\sum_{K\in T}\|\sigma_h\|^2_{L^2(K)}\right]^{1/2}$,
- l'erreur relative $\eta_{rel}(\Omega)=100\times\dfrac{\eta(\Omega)}{\sqrt{\eta(\Omega)^2+\|\sigma_h\|^2_{L^2(\Omega)}}}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D’après l’expression [éq 2-1], on voit que pour calculer l’indicateur d’erreur sur la maille K, on doit connaître :

- les chargements éventuels f sur K et g_N sur $\partial K \cap \Gamma_N$ (ou leur discrétisation f_h et g_{Nh}),
- les quantités h_K , h_F et $\mathbf{n}$ liées à la géométrie de l’élément,
- le champ de contraintes σ_h ,
- la liste des voisins de K pour récupérer les contraintes sur ces éléments, nécessaires au calcul du 2ème terme de [éq 2-1].

1 et 2 peuvent être calculés ou récupérés facilement.

3 doit avoir été calculé au préalable par une des options `'SIGM_ELNO'` ou `'SIEF_ELNO'`.

Dans le cas contraire, un message d’erreur fatale est émis.

4 nécessite le calcul d’une connectivité particulière maille-mailles, en plus de la connectivité standard maille-nœuds. Ce nouvel objet est stocké dans la structure de données de type maillage.

Pour le détail de l’implantation dans *Aster*, voir [bib6].
Pour la validation de l’estimateur, voir [bib7].

5 Bibliographie

[1] BERNARDI, B. METIVET, R. VERFÜRTH : Groupe de travail maillage adaptatif : analyse numérique d’indicateurs d’erreur. Note HI-72/93/062

[2] BABUSKA, RHEINBOLDT : A posteriori error estimates for the finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 12, 1597-1659, 1978

[3] J.P. de S.R. GAGO : A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method. Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea, U.K., 1982

[4] D.W. KELLY, J.P. de S.R. GAGO, O. C. ZIENKIEWICZ, I. BABUSKA : A posteriori error analysis and adaptative processes in finite element method : part I - error analysis. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 19, 1593-1619, 1983

[5] X. DESROCHES : Estimateurs d’erreur en élasticité linéaire. Note HI-75/93/118

[6] A. CORBEL : Implantation d’un estimateur d’erreur en résidu dans le Code de mécanique Aster. Rapport de fin de stage - Juin 94

[7] V. NAVAB : Validation d’un estimateur d’erreur en résidu en élasticité bi et tri-dimensionnelle. Rapport de stage - Mars 95

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
07/04/09	*X.DESROCHES (EDF-R&D/AMA)*	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)