Calcul de l'erreur en relation de comportement en dynamique sous une formulation fréquentielle

Résumé :

Ce document présente le principe du calcul de l'erreur en relation de comportement (ERC). Dans ce document, la résolution d'un tel problème est restreint au cas de la dynamique linéaire sous le un formalisme fréquentiel.

Plusieurs utilisations peuvent motiver le recours à la résolution d'un problème d'ERC en dynamique linéaire :

- L'expansion de données mesurées sur un modèle numérique (reconstruction de champs),
- L'utilisation de la fonctionnelle d'ERC comme fonction coût dans un problème de recalage ou d'identification,
- La localisation spatiale de défauts d'un modèle numérique à partir de mesures.

L'opérateur de résolution de l'ERC est `CALC_ERC_DYN` [u4.53.41].

Table des matières

1 Notations

$\Phi(\cdot)$	:	Potentiel d'énergie libre
$\underline{\underline{\epsilon}}$	:	Tenseur de déformations
$\underline{\underline{\sigma}}$	:	Tenseur de contraintes
Ω	:	Domaine occupé par la structure
$\tilde{u}$	:	Conditions aux limites en déplacement sur le bord $\delta_u \Omega$
$\tilde{f}$	:	Conditions aux limites en effort sur le bord $\delta_f \Omega$
$\underline{\underline{C}}$	:	Tenseur de Hooke
u	:	Champ de déplacement
$\Re(\cdot)$	:	Partie réelle
ξ_ω^2	:	Erreur de Drüker sous un formalisme fréquentiel
(u, v, w)	:	Triplet de champs admissibles associé au problème d'ERC.
e_ω^2	:	Fonctionnelle d'ERC sous un formalisme EF dans le domaine de la dynamique linéaire sous une écriture fréquentielle.
ω	:	Pulsation propre
f	:	Fréquence
$[K]$	:	Matrice de rigidité EF
$[M]$	:	Matrice de masse EF
$[G_r]$	:	Matrice norme définie positive
$[H]$	:	Matrice d'observation
Ψ	:	Mode propre
α	:	Paramètre de type régularisation de la fonctionnelle d'ERC.
γ	:	Paramètre de type pondération de la fonctionnelle d'ERC.
$\hat{u}$	:	Champ de déplacement mesuré.
A	:	Matrice associée à la résolution du problème d'ERC.
l	:	Vecteur d'inconnues associé à la résolution du problème d'ERC.
b	:	Second membre associé à la résolution du problème d'ERC.

2 Introduction aux fonctionnelles énergétiques : Cas de l'erreur en relation de comportement

Dans le cadre de la simulation de manière générale et de la mécanique en particulier, on est souvent amené à évaluer une ou des grandeurs physiques régissant le système étudié à partir des mesures. Or, de manière générale, les grandeurs recherchées non seulement ne sont pas accessibles via la mesure mais peuvent présenter un certain nombre de pathologies (incomplètes, redondantes, entachées d'erreurs ...).
On rentre donc dans le cadre de résolution d'un problème inverse où le but est d'établir un lien mathématique reposant sur des lois physiques (modèle), afin de retrouver les grandeurs recherchées reproduisant au mieux les mesures expérimentales. Souvent, cela se traduit par la résolution d'un problème de minimisation où une fonctionnelle (fonction coût) est utilisée pour, d'une part, quantifier l'écart entre le modèle et la mesure et, d'autre part, résoudre le caractère potentiellement mal posé du problème inverse.

En mécanique, et en particulier dans la famille des méthodes variationnelles (par distinction des méthodes probabilistes), on distingue classiquement trois approches pour la construction des fonctionnelles permettant la résolution du problème inverse en question :

- les méthodes basées sur les moindres carrés ;
- l'approche reposant sur le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti ;
- les approches basées sur la construction de fonctionnelles énergétiques

Contrairement aux moindres carrés et à l'approche faisant intervenir le principe de réciprocité, les fonctionnelles énergétiques se basent sur la mesure de la distance entre les champs de solutions admissibles construits à partir des mesures et du modèle.

Ces techniques ont été premièrement introduites par P. Ladevèze dans le but d'estimer la qualité d'une solution obtenue par la méthode Eléments Finis. Ainsi dans [bib1] le concept d'Erreur en Relation de Comportement (ERC) a été introduit. Depuis, des nombreuses applications ont vu le jour, comme par exemple [bib2], [bib3] ou [bib4].

L'introduction de cette notion peut reposer sur 2 principes distincts :

- L'approche valable pour les Matériaux Standards Généralisés (MSG) qui, pour une structure à comportement donné, caractérisée par un potentiel d'énergie libre $\Phi(\cdot)$, la différence entre deux évolutions associées à des conditions aux limites en effort et en déplacement est quantifiée par le résidu suivant:

$$e(\epsilon,\sigma)=\Phi(\epsilon)+\Phi^*(\sigma)-\sigma:\epsilon$$

  où $\Phi^*(\cdot)$ est le potentiel défini par la transformée de Legendre-Fenchel de $\Phi(\cdot)$. Elle découle de l'expression proposée par Fenchel entre deux grandeurs, primale et duale, provenant d'un potentiel donné, à savoir:

$$e_\Pi(x,y)=\Pi(x)+\Pi^*(y)-x:y$$

  Un développement de cette expression pour l'écart de deux couples admissibles $(x_{1,}y_1)$ et $(x_{2,}y_2)$ conduit à:

$$E_\Pi(x,y)=\langle x_2-x_1,y_2-y_1\rangle$$

  Cette erreur est toujours positive et devient nulle lorsque les conditions aux limites sont compatibles avec la relation de comportement. De plus, elle permet de définir une distance qui répond aux critères de positivité et symétrie nécessaires. Elle donne lieu aux expressions plus connues de l'erreur en relation de comportement présentées ultérieurement.

- La deuxième approche est basée sur le principe de stabilité au sens de Drucker défini pour tout couple d'évolution de la structure (partant d'un même état initial) par l'inégalité suivante:

$$\int_0^T\int_\Omega(\sigma_2-\sigma_1):(\dot\epsilon_2-\dot\epsilon_1)\,d\Omega\,dt\geq 0$$

  Si on se place dans le cadre des petites perturbations, la réponse de la structure sera unique pour toute évolution issue de la même histoire des conditions aux limites. Ce caractère d'unicité est vérifiée dans les lois de comportement fréquemment utilisées (élasticité, plasticité, viscoélasticité, etc.) hormis quelques lois « singulières » tels que les lois d'endommagement. En effet, l'intégration de l'équation variationnelle du principe des Puissances Virtuelles entraîne la nullité de l'expression suivante :

$$\int_0^T\int_\Omega(\sigma_2-\sigma_1):(\dot\epsilon_2-\dot\epsilon_1)\,d\Omega\,dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{1}{2}\rho(\dot u_2-\dot u_1)^2=0$$

  Sous l'hypothèse de la condition de stabilité de Drücker, cette équation permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\int_0^T\int_\Omega\frac{1}{2}\rho(\dot u_2-\dot u_1)^2\leq 0\;\forall\,t\in[0,T],\;\forall\,x\in\Omega$$

  ce qui se traduit par l'égalité entre les deux vitesses et ainsi l'égalité entre les déplacements partout dans la structure et à chaque instant t (tenant compte des états initiaux identiques pour les deux évolutions 1 et 2). Ensuite, les histoires des déformations sont égales (par dérivation), qui sera suivi par l'égalité des contraintes internes (par relation de comportement).

Cette hypothèse a été exploitée pour définir un résidu au sens d'erreur en relation de comportement entre deux solutions qualifiées de cinématiquement admissible et statiquement admissible, respectivement. Un résidu nul signifie que les deux quantités, cinématiquement admissible et statiquement admissible, sont compatibles avec la loi de comportement.

La relation de comportement semble donc une bonne mesure de la compatibilité d'un modèle aux conditions aux limites en déplacement et en effort. Ainsi, de nombreux travaux ont été réalisés sur cette approche dans différents domaines (élastostatique, élastodynamique, etc.) basés sur la construction d'une distance entre champs admissibles (aux conditions aux limites en effort et déplacements) au sens de la relation de comportement.
Supposons, par ailleurs, que l'on a construit deux solutions $S^1(\sigma_1)$ et $S^2(\epsilon_2)$ issues de deux évolutions compatibles des conditions en déplacement et en efforts respectivement . La distance, au sens de la relation de comportement, qui permet d'évaluer quantitativement l'écart E entre ces deux solutions doit vérifier:

$$\begin{cases} E(S^1, S^2)=E(S^2, S^1)\forall S^1, S^2 \\ E(S^1, S^2)\geq 0\forall S^1, S^2 \\ E(S^1, S^2)=0\Leftrightarrow S^1=S^2 \end{cases}$$

Quelques formulations classiques de l'erreur en relation de comportement sont proposées par la suite à titre d'exemple.

2.1 Formulation classique de l'erreur en relation de comportement : cas de l'élastostatique

La formulation d'une fonctionnelle énergétique de type erreur en relation de comportement est particulièrement simple dans le cas de l'élastostatique.
On considère que les lois qui régissent le problème sont :

- L'équation d'équilibre :

$$\mathrm{div}\,\sigma=0$$

- Les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u=\tilde{u}\; sur\, \delta_u\Omega \\ \sigma\cdot n=\tilde{f}\; sur\, \delta_f\Omega \end{cases}$$

- La loi de comportement:

$$\underline{\underline{\sigma}}=\underline{\underline{C}}:\underline{\underline{\epsilon}}(u)$$

Ainsi, la fonctionnelle d'ERC est associé à un problème de recherche de champs admissibles décrit par :

Trouver le champ σ_s statiquement admissible et u_c cinématiquement admissible minimisant :

$$\int_{\Omega}(\sigma_s-\epsilon(u_c)):C^{-1}:(\sigma_s-\epsilon(u_c))\,d\Omega$$

sous les contraintes d'admissibilité :

$$\begin{cases} u_c=\{u\in H^1(\Omega)\,;\,u=\tilde{u}\; sur\, \delta_u\Omega\} \\ \sigma_s=\{u\in H^{\mathrm{div}}(\Omega)\,;\,\sigma\cdot n=\tilde{f}\; sur\, \delta_f\Omega\} \end{cases}$$

Dans le cas statique, on peut montrer que les champs solution statiquement et cinématiquement admissibles sont indépendants. Cela se traduit par la possibilité d'être calculés séparément comme un problème de Neumann et de Dirichlet respectivement.

2.2 Formulation modifiée de l'erreur en relation de comportement : cas dynamique

Dans le cas de l'élastodynamique, il a été prouvé [bib5] que l'extension "directe" de la formulation précédente ne respecte pas l'esprit des fonctionnelles énergétiques pour les champs dynamiquement et statiquement admissibles car, outre le couplage par l'équation de comportement, ces champs sont également liés par la relation d'équilibre, qui est maintenant :

$$\operatorname{div}(\sigma)-\rho\ddot{u}=0$$

Ainsi, une approche connue sous le nom de "ERC modifiée" est introduite par Feissel et Allix dans [bib3], dont la formulation est résumée ci-dessous :

Trouver le champ σ_d dynamiquement admissible et u_c cinématiquement admissible minimisant :

$$\int_0^T\int_\Omega(\sigma_d-\epsilon(u_c)):C^{-1}:(\sigma_d-\epsilon(u_c))\,d\Omega\,dt+\int_0^T\left(\int_{\delta_u\Omega}d_u(u_c,\tilde{u})dS+\int_{\delta_f\Omega}d_f(f,\tilde{f})dS\right)dt$$

sous les contraintes d'admissibilité :

$$\begin{cases} u_c=\{u\in H^1(\Omega);\, u=\tilde{u}\quad \text{sur}\quad \delta_u\Omega\} \\ \sigma_s=\{u\in H^{\text{div}}(\Omega);\, \sigma\cdot n=\tilde{f}\quad \text{sur}\quad \delta_f\Omega\quad \text{et}\quad \operatorname{div}(\sigma)-\rho\ddot{u}=0\quad \text{sur}\quad \Omega\} \end{cases}$$

où les termes d_u et d_f sont des normes définies positives à définir (typiquement des normes L^2).

2.2.1 Formulation fréquentielle dans un formalisme Éléments Finis

La formulation que l'on présente ci-après est issue des travaux dans [bib6] et [bib7]. Elle convient aux cas de la dynamique de structures traités en fréquentiel et est particulièrement adaptée aux problèmes dans une formulation EF en dynamique linéaire.

Plaçons nous dans le cas où nous recherchons des solutions périodiques du problème dynamique cité plus haut de la forme :

$$\Re(u_\omega e^{i\omega t})\ \text{ et }\ \Re(f_\omega e^{i\omega t})$$

où $\Re(\cdot)$ désigne la partie réelle et ω la pulsation donnée. Alors l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div}(\sigma)-\omega^2\rho\,u_\omega=0$$

Par ailleurs, notons les champs admissibles tels que:

- $u_c=u$ est le champ cinématiquement admissible
- $\begin{cases}\sigma_d=C:\epsilon(v)\\ \Gamma_d=-\rho\,\omega^2 w\end{cases}$ sont les champs dynamiquement admissibles

Alors, l'inégalité de Drüker s'écrit maintenant :

$$\xi_\omega^2(u,v,w)=\int_\Omega \frac{1}{2}\mathrm{tr}[C:(\epsilon(u)-\epsilon(v))^*(\epsilon(u)-\epsilon(v))]+\frac{1}{2}\rho\,\omega^2(u-w)^*(u-w)\,d\Omega$$

où le signe $*$ désigne le complexe conjugué. Cette expression permet de se rapprocher de l'écriture de la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement couramment utilisée en dynamique linéaire sous une formulation propre de la discrétisation EF.

En effet, admettons que l'on s'intéresse au problème de recherche de modes propres tel que :

$$([K]-\omega^2[M])\Psi=0 \quad ; \quad \Psi\neq 0$$

où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de raideur et de masse respectivement.

Dans ce contexte, le problème de recherche de champs admissibles optimaux au sens d'une fonctionnelle de type ERC modifiée est formulé de la manière suivante :

Trouver le triplet de champs admissibles (u,v,w) qui minimisent :

$$e_\omega^2(u,v,w)=\frac{\gamma}{2}(u-v)^*[K](u-v)+\frac{1-\gamma}{2}(u-w)^*\omega^2[M](u-w)+\frac{1-\alpha}{\alpha}(Hu-\hat{u})^*[Gr](Hu-\hat{u})$$

sous la contrainte :

$$[K]v-\omega^2[M]w=0$$

Où :

$[K]$ représente une matrice de rigidité réelle
$[M]$ représente une matrice de masse
$[H]$ représente une matrice d'observation
$[G_r]$ représente une matrice symétrique définie positive servant de norme des erreurs dans l'espace d'observation
$\omega=2\pi f$: pulsation d'excitation
$\hat{u}$ observation des déplacements à la pulsation ω
γ paramètre de pondération des erreurs $(u-v)$ et $(u-w)$
α paramètre de pondération de la fonctionnelle assimilable à un terme de régularisation

2.2.2 Obtention des champs admissibles pour la formulation fréquentielle dans un formalisme Éléments Finis

Le problème d'optimisation sous contrainte ci-dessus peut se transformer en un problème sans contrainte en introduisant le Lagrangien suivant :

$$E_\omega^2(u,v,w,\lambda)=e_\omega^2(u,v,w)+([K]v-\omega^2[M]w)\lambda$$

Ainsi, l'obtention du triplet (u,v,w) minimisant le problème sous contrainte associé s'obtient en cherchant le point selle du Lagrangien donné par :

$$\partial E_\omega^2(u,v,w,\lambda)=0$$

ce qui, en considérant les matrices $[K]$ et $[M]$ symétriques conduit à :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial E_\omega^2}{\partial u}=\dfrac{\gamma}{2}[K](u-v)+\dfrac{1-\gamma}{2}\omega^2[M](u-w)+\dfrac{1-\alpha}{\alpha}H^T[Gr](Hu-\hat{u})=0\\
\dfrac{\partial E_\omega^2}{\partial v}=\dfrac{-\gamma}{2}[K](u-v)+[K]\lambda=0\\
\dfrac{\partial E_\omega^2}{\partial w}=\dfrac{\gamma-1}{2}\omega^2[M](u-w)-\omega^2[M]\lambda=0\\
\dfrac{\partial E_\omega^2}{\partial \lambda}=[K]v-\omega^2[M]w=0
\end{cases}
$$

En simplifiant les équations et cherchant à obtenir un système d'équations symétrique, la recherche des champs aboutit à la résolution du système d'équations linéaire de la forme:

$$A\,l=b$$

avec, pour chaque pulsation propre ω_i :

$$A_i=\begin{pmatrix}\gamma\left(K+\gamma/(1-\gamma)\omega_i^2 M\right) & -\gamma\left(K-\omega_i^2 M\right)\\ -\gamma\left(K-\omega_i^2 M\right) & \left(-2\alpha/(1-\alpha)\right)H^T G_r H\end{pmatrix} \text{ ; et } b_i=\begin{pmatrix}0_n\\ \left(-2\alpha/(1-\alpha)\right)H^T G_r \hat{u}_i\end{pmatrix}$$

où le vecteur des champs inconnus est :

$$l_i=\begin{pmatrix}u\\ u-v\end{pmatrix}_i$$

Notons que dans que le champ $(u-w)$ s' obtient directement en combinant la deuxième et la troisième équation de recherche du point selle conduisant à :

$$(u-w)=\frac{\gamma-1}{\gamma}(u-v)$$

3 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

3.1 Mise en œuvre pratique

L'opérateur `CALC_ERC_DYN` [U4.53.41] a été développé pour permettre de résoudre le problème de recherche de champs optimaux (u,v,w) associés au problème d'optimisation sous contrainte décrit dans la section précédente.
Concrètement, il résout pour une liste de fréquences données, le système d'équations linéaires $A\,l=b$ détaillée plus haut, ce qui permet d'obtenir les champs u et $u-v$ recherchés. Il convient de noter que le champ $u-w$ n'est pas proposé en sortie de l'opérateur car il résulte de manière triviale d'un rapport proportionnel avec $u-v$.

Cet opérateur permet par ailleurs d'évaluer, si souhaité, la valeur de la fonctionnelle e_ω^2 au triplet solution (u,v,w) . Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'on souhaite utiliser la fonctionnelle e_ω^2 dans un problème de recalage ou d'identification.

L'opérateur utilise cinq mots-clés obligatoires :

- les mot-clés `MATR_RIGI` et `MATR_MASSE` correspondent respectivement aux matrices assemblées réelles de rigidité et de masse du modèle étudié ;
- le mot-clé `MATR_NORME` : ce mot-clé permet de renseigner la matrice assemblée généralisée correspondant à la matrice symétrique définie positive G_r servant de norme des erreurs dans l'espace d'observation.

- le mot-clé MATR_PROJ : ce mot-clé permet de donner la matrice de projection associé à l'opérateur H . Il s'agit d'une correspondance géométrique entre le maillage associé aux matrices de masse et rigidité d'un côté, et du maillage associé aux observations $\hat{u}$ d'un autre côté. La matrice de projection demandée ici doit être issue d'un calcul avec l'opérateur PROJ_CHAMP [U4.72.05] avec la méthode 'COLLOCATION'.
- le mot-clé MESURE : ce mot-clé permet de renseigner les champs qui seront utilisés en tant qu'observation $\hat{u}_i$. Ce concept doit contenir autant de numéros d'ordre que le nombre de fréquences qui seront étudiées lors de l'appel de l'opérateur (opérandes FREQ/LIST_FREQ). Par ailleurs, la dimension des champs contenus dans ce concept doit être cohérente avec la dimension de la matrice norme renseignée sous l'opérande MATR_NORME. De plus les champs contenus ne doivent pas comporter des degrés de liberté de type Lagrange. Pour ce faire, il est conseillé de conditionner ce concept à l'aide préalable de l'opérateur OBSERVATION [U4.90.03] ;

- le mot-clé CHAMP_MESURE permettant de définir le type de champ contenu dans la mesure ;
- le mot-clé FREQ / LIST_FREQ permettant de définir les fréquences auxquelles sera résolu le problème ;
- les mot-clés ALPHA et GAMMA correspondant aux paramètres de pondération de la fonctionnelle assimilable à un terme de régularisation (α) et au paramètre de pondération des erreurs $(u-v)$ et $(u-w)$ (γ) ;
- le mot-clé EVAL_FONCT permettant de déterminer si la valeur de la fonctionnelle pour le triplet de champs optimal sera évaluée et stocké dans le résultat ;
- le mot-clé SOLVEUR permettant de choisir le type de solveur qui sera utilisée lors de la résolution du problème. Dans la version actuelle, les solveurs disponibles sont MUMPS (défaut) et LDLT.

4 Bibliographie

[1] P.LADEVEZE, *Comparaison des modèles des milieux continus*. Thèse de doctorat. 1975

[2] A. CHOUAKI, *Une méthode de recalage des modèles dynamiques de structures avec amortissent*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1998.

[3] P. FEISSEL, O. ALLIX, M*odified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case.* Computer methods in applied mechanics and engineering, 196 (2006), pp. 1968–1983 .

[4] K. HADJ-SASSI, *Une stratégie d'identification conjointe des paramètres et de l'état de Structures à comportements non-linéaires. Assimilation de données et erreur en loi de comportement*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2007.

[5] P. FEISSEL, *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide avec des données incertaines*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2003

[6] A. CHOUAKI, Une méthode de recalage des modèles en dynamiques de structures avec amortissement, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1998.