Relations de comportement élasto-visco-plastique de Chaboche

Résumé :

Ce document décrit l'intégration du modèle de comportement élasto-visco-plastique de Chaboche à écrouissage cinématique non linéaire et isotrope, avec prise en compte possible de la viscosité. Le modèle implanté possède une ou deux variables cinématiques, et prend en compte toutes les variations des coefficients avec la température, et possède un effet d'écrouissage sur les variables tensorielles de rappel. Cette version permet également de modéliser (de façon facultative) le caractère visqueux du matériau (viscosité de Norton). Elle est intégrée par la résolution d'une seule équation scalaire non linéaire. Ce modèle est disponible en 3D, déformation plane, axisymétrie. La modélisation en contrainte plane utilise une méthode de condensation statique (de Borst). On donne aussi des éléments pour identifier les coefficients de la relation de comportement.

Table des matières

1 Modèles élasto-visco-plastiques de Chaboche disponibles dans *Code_Aster*

Pour le calcul de structures soumises à des chargements cycliques, les écrouissages isotrope (linéaire ou non) et cinématique linéaire classiques [R5.03.02] et [R5.03.16] ne sont plus suffisants. En particulier, on ne peut pas décrire correctement les cycles stabilisés obtenus expérimentalement sur une éprouvette de traction soumise à une déformation imposée alternée ou une traction-compression.

Si on cherche à décrire précisément les effets d'un chargement cyclique, il est souhaitable d'adopter des modélisations plus sophistiquées (mais simples d'emploi) telles que le modèle de Saïd Taheri, par exemple, cf. [R5.03.05], ou bien si le nombre de cycles est limité le modèle de Jean-Louis Chaboche qui est présenté ici.

En réalité, le modèle de Chaboche peut être plus ou moins sophistiqué. Les modèles développés dans *Code_Aster* comportent soit une variable cinématique (`VMIS_CIN1_CHAB` et `VISC_CIN1_CHAB`) soit deux (`VISC_CIN2_CHAB` et `VMIS_CIN2_CHAB`), et de l'écrouissage isotrope.

Le choix d'utiliser deux variables cinématiques complique certes le modèle, mais permet d'identifier correctement les essais uni-axiaux dans une plus large gamme de déformations [bib2], [bib7]. Un certain nombre d'identifications des paramètres de ce modèle ont été effectués principalement pour les aciers inoxydables A316 et A304 ([bib7], [bib8]).

Les modèles comportent 8 paramètres (une seule variable cinématique) ou 10 (deux variables cinématiques), introduits dans la commande `DEFI_MATERIAU` :

```
CIN1_CHAB (CIN1_CHAB_FO)            = _F(
                             ♦ R_0 =       R_0,
                             ◊ R_I =       R_I,   (inutile si B=0)
                             ◊ B =         b  ,   (défaut : 0.)

                             ♦ C_I =       C_I,
                             ◊ K =         k  ,   (défaut : 1.)
                             ◊ W =         w  ,   (défaut : 0.)

                             ♦ G_0 =       G_0,
                             ◊ A_I =       A_I,   (défaut : 0.)
                            )
CIN2_CHAB (CIN2_CHAB_FO)            = _F(
                             ♦ R_0 =       R_0,
                             ◊ R_I =       R_I,
                                inutile si B=0 ou si effet de mémoire)
                             ◊ B =         b  ,   (défaut : 0.)

                             ♦ C1_I =      C1_I,
                             ♦ C2_I =      C2_I,
                             ◊ K =         k   ,  (défaut : 1.)
                             ◊ W =         w   ,  (défaut : 0.)

                             ♦ G1_0 =      G1_0,
                             ♦ G2_0 =      G2_0,
                             ◊ A_I =       A_I ,  (défaut : 0.)
                            )
```

Les 8 ou 10 paramètres sont des constantes réelles. Tous ces paramètres peuvent dépendre de la température (mots clé `CIN1_CHAB_FO` ou `CIN2_CHAB_FO`) et les valeurs attendues sont de type `fonction`.

Dans le cas où l'on veut introduire en plus de la viscosité (modèles `VISC_CIN1_CHAB` et `VISC_CIN2_CHAB`), il faut également fournir dans la commande `DEFI_MATERIAU`, sous le mot-clé

LEMAITRE (ou LEMAITRE_FO) les paramètres N et UN_SUR_K, qui peuvent dépendre de la température.

```
LEMAITRE (LEMAITRE_FO)              = _F(
                         ♦ N =          n,
                         ♦ UN_SUR_K =   1/K
```

Le paramètre UN_SUR_M du mot-clé LEMAITRE (respectivement LEMAITRE_FO) doit obligatoirement être mis à zéro (respectivement à la fonction identiquement nulle).

Il est possible aussi de prendre en compte un effet de mémoire de la plus grande déformation plastique à l'aide des modèles (VISC_CIN2_ MEMO et VMIS_CIN2_MEMO) . Les mots clés à renseigner sont :

```
MEMO_ECRO (MEMO_ECRO_FO)                = _F(
                       ♦ Q_M =      Qm,
                       ♦ Q_0 =      Q0,
                       ♦ MU =       mu,
                       ♦ ETA =      eta, (défaut : 0.5)
```

En cas de chargement non proportionnel, il est nécessaire d'enrichir le modèle, par la donnée de deux paramètres supplémentaires :

CIN2_NRAD = _F(

◊ DELTA1= δ_1 (défaut= 1.E+0),

◊ DELTA2= δ_2 (défaut= 1.E+0),

avec $0\leq\delta_1\leq 1$, $0\leq\delta_2\leq 1$

Les lois de comportement sont accessibles dans toutes les commandes utilisant le mot clé COMPORTEMENT avec les relations suivantes :
VISC_CIN1_CHAB, VISC_CIN2_CHAB, VISC_CIN2_MEMO, VISC_CIN2_NRAD, VISC_MEMO_NRAD, VMIS_CIN1_CHAB, VMIS_CIN2_CHAB, VMIS_CIN2_MEMO, VMIS_CIN2_NRAD, VMIS_MEMO_NRAD.

Remarque : le modèle VISCOCHAB [R5.03.14] permet également de représenter les effets décrits dans ce document. Il comporte de plus des termes de restauration et d'écrouissage supplémentaires. Mais son utilisation dans des calculs de structure est plus coûteuse en temps calcul (car on doit résoudre soit par la méthode de Runge-Kutta soit par la méthode de Newton un système de 27 équations à 27 inconnues). De plus, il pose des problèmes de robustesse quand le pas de temps est grand, car la méthode de Newton peut échouer. Cela entraîne de nombreuses subdivisions du pas de temps.

Les modèles décrits dans ce document sont optimisés, dans la mesure où ils conduisent à résoudre une seule résolution scalaire, et la méthode de résolution utilisée très robuste (méthode de Brent ou sécante, cf. [R5.03.14]) ; c'est donc un modèle capable d'intégrer rapidement de grands pas de temps.

Dans la suite de ce document, on décrit les caractéristiques des différents modèles. On présente ensuite le détail de leur intégration numérique en lien avec la construction de la matrice tangente cohérente. Enfin, on donne également quelques éléments pour l'identification des caractéristiques du matériau.

2 Description des modèles

2.1 Description des modèles

A tout instant, l'état du matériau est décrit par la déformation ε, la température T, la déformation plastique ε^p, la déformation plastique cumulée p et le tenseur de rappel X. Les équations d'état définissent alors en fonction de ces variables d'état la contrainte $\sigma = \sigma^H \mathbf{Id} + \tilde{\sigma}$ (décomposée en parties hydrostatique et déviatorique), la part isotrope de l'écrouissage R et la part cinématique X :

$$\sigma^H = \frac{1}{3} tr(\sigma) = K\, tr(\varepsilon - \varepsilon^{\mathbf{th}}) \text{ avec } \varepsilon^{\mathbf{th}} = \alpha(T\text{-}T^{ref})\mathbf{Id} \qquad \textbf{éq 2.1-1}$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma^H \mathbf{Id} = 2\mu(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^p) \qquad \textbf{éq 2.1-2}$$

$$R = R(p) \qquad \textbf{éq 2.1-3}$$

$$X = X(p, \varepsilon^p) = X_1(p, \varepsilon^p) + X_2(p, \varepsilon^p) \qquad \textbf{éq 2.1-4}$$

où K, μ, α et les coefficients de $X(p)$ et $R(p)$ sont des caractéristiques du matériau qui peuvent dépendre de la température. Plus précisément, ce sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, le coefficient de dilatation thermique, les fonctions d'écrouissage isotrope et cinématique. Quant à $T^{réf}$, il s'agit de la température de référence, pour laquelle on considère la déformation thermique comme étant nulle.

Remarque :

> *Pour le modèle `VISC_CIN1_CHAB` on ne considère que la seule variable tensorielle $X_1(p)$ donc $X_2(p)=0$. Ceci reste valable pour toute la suite : on décrira formellement les deux modèles de la même façon, le modèle `VISC_CIN1_CHAB` se déduisant de `VISC_CIN2_CHAB` en supposant $X_2(p)=0$.*

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par une loi d'écoulement normale à un critère de plasticité de von Mises :

$$F(\sigma, R, X) = (\tilde{\sigma} - X_1 - X_2)_{eq} - R(p) \text{ avec } A_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{A} : \tilde{A}} \qquad \textbf{éq 2.1-5}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\tilde{\sigma} - X_1 - X_2}{(\tilde{\sigma} - X_1 - X_2)_{eq}} \qquad \textbf{éq 2.1-6}$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} \qquad \textbf{éq 2.1-7}$$

Quant au multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$, il est obtenu par la condition de cohérence :

$$\begin{cases} \text{si } F < 0 \text{ ou } \dot{F} < 0 & \dot{\lambda} = 0 \\ \text{si } F = 0 \text{ et } \dot{F} = 0 & \dot{\lambda} \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{éq 2.1-8}$$

Remarque :

> *L'évolution des variables $\mathbf{X_1}$ et $\mathbf{X_2}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{3} C_1(p)\alpha_1 \\ X_2 &= \frac{2}{3} C_2(p)\alpha_2 \\ \dot{\alpha}_1 &= \dot{\varepsilon}^p - \gamma_1(p)\alpha_1 \dot{p} \\ \dot{\alpha}_2 &= \dot{\varepsilon}^p - \gamma_2(p)\alpha_2 \dot{p} \end{aligned} \quad \textbf{éq 2.1-9}$$

Les fonctions $C(p)$, $\gamma(p)$ et $R(p)$ sont définies, conformément à [bib2] par :

$$\begin{aligned} R(p) &= R_\infty + (R_0 - R_\infty) e^{-bp} \\ C_1(p) &= C_1^\infty (1 + (k-1) e^{-wp}) \\ C_2(p) &= C_2^\infty (1 + (k-1) e^{-wp}) \\ \gamma_1(p) &= \gamma_1^0 (a_\infty + (1 - a_\infty) e^{-bp}) \\ \gamma_2(p) &= \gamma_2^0 (a_\infty + (1 - a_\infty) e^{-bp}) \end{aligned}$$

L'évolution de ces coefficients permet de représenter de plusieurs façons l'écrouissage : écrouissage isotrope classique (monotone ou cyclique) par $R(p)$, « écrouissage » des coefficients relatifs aux termes cinématiques par $C(p)$ et $\gamma(p)$. (cf. [bib11]). Les expressions en exponentielle sont semblables à la définition de l'écrouissage cinématique non linéaire (eq.2,1,9), et (dans leur principe) représentent une variation des coefficients depuis la valeur indicée par 0 (pour $p=0$) jusqu'à la valeur indicée par ∞ quand p devient grand.
Ceci implique que les coefficients b et w sont supposés positifs. Dans le cas contraire, un message d'alarme est émis, car la solution calculée risque d'être non physique.

La présence de viscosité peut se modéliser de façon simple [bib2] en remplaçant la condition de cohérence [éq 2.1-8] par :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle F \rangle}{K} \right)^N \quad \textbf{éq 2.1-10}$$

$\langle F \rangle$ partie positive de F (crochets de Macauley), K, N caractéristiques de viscosité (Norton) du matériau. On laisse inchangées toutes les autres équations du modèle. On verra qu'une telle introduction de la viscosité n'entraîne que des modifications mineures de l'algorithme d'intégration implicite de la loi de comportement.

L'effet de mémoire consiste à remplacer l'évolution de l'écrouissage isotrope par :

$F(\sigma, R, X) = (\tilde{\sigma} - X_1 - X_2)_{eq} - R_0 - R(p)$
$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p}$
$Q = Q_0 + (Q_m - Q_0)(1 - e^{-2\mu q})$
$f(\varepsilon^p, \xi, q) = \frac{2}{3} J_2(\varepsilon^p - \xi) - q \le 0$ définissant un domaine caractérisant les déformations plastiques maximales, dont q mesure le rayon et ξ le centre, calculé suivant une loi de normalité c'est à dire avec la loi d'évolution : $\dot{\xi} = \frac{1-\eta}{\eta} \dot{q} n^*$. Le paramètre η (qui n'existe pas dans la formulation initiale [bib.2]), i permet de prendre en compte partiellement l'effet de mémoire. S'il est égal à 0.5, on retrouve la formulation initiale. S'il vaut 1, q est égal à la norme de la plus grande déformation plastique atteinte. S'il est très inférieur à 0.5, l'effet de mémoire est pris en compte en partie seulement.

Remarques :

- *La définition de* $\mathbf{X_1}$ *et* $\mathbf{X_2}$ *sous la forme [éq 2.1-9] :*
  - *permet de garder une formulation qui prenne en compte les variations des paramètres avec la température sans introduire de terme en* $\dot{T}$ *comme dans [bib.4], de la même façon que le modèle de Chaboche viscoplastique. Ces termes sont nécessaires car leur non prise en compte conduirait à des résultats inexacts [bib4].*
  - *permet d'avoir une écriture cohérente avec l'expression thermodynamique du potentiel plastique [bib2] (p.221).*
- *On constate que les fonctions* $C_1(p), \gamma_1(p), C_2(p), \gamma_2(p), R(p)$ *intervenant dans les équations précédentes permettent toutes les trois de modéliser différents effets d'écrouissage non linéaires. L'introduction de l'écrouissage, soit au niveau de la partie cinématique, par* $C(p)$ *, soit au niveau du terme de rappel, par la fonction* $\gamma(p)$ *, n'a pas le même effet sur les essais d'identification [bib2]. L'utilisation d'un modèle avec* $\gamma(p)$ *permet en particulier d'identifier plus facilement de forts écrouissages cycliques. Plusieurs travaux d'identification des coefficients des modèles de Chaboche ont d'ailleurs été effectués sur la base du modèle avec un écrouissage représenté par* $\gamma(p)$ *([bib5], [bib6]), en particulier pour les aciers inoxydables.*

2.2 Ajout de l'effet de mémoire

La discrétisation implicite du problème avec effet de mémoire conduit à un système de 20 équations à 20 inconnues [7] :

6 éq : $\tilde{\sigma}=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon}-\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon^p\right)$

1 eq :

$$\left(\tilde{\sigma}-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^--\frac{2}{3}C_2\alpha_2^--\frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\Delta}\,\alpha_1\left(\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon^p\right)-\frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\Delta}\,\alpha_2\left(\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon^p\right)\right)_{eq}=R_0+R^-+\Delta R+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

6 eq : $$\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon^p=\frac{3}{2}\Delta p\;\frac{\tilde{\sigma}-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^--\frac{2}{3}C_2\alpha_2^--\frac{2}{3}C_1\Delta\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\Delta\alpha_2}{R_0+R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}=\Delta p\;n$$

1 eq : $f\left(\varepsilon^p,\boldsymbol{\xi},q\right)=\frac{2}{3}J_2\left(\varepsilon^p-\xi\right)-q=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\left(\varepsilon^p-\xi\right):\left(\varepsilon^p-\xi\right)}-q\le 0$

6 eq : $\boldsymbol{\Delta}\,\xi=(1-\eta)\frac{\Delta q}{\eta}n^*$

avec $\Delta R=b(Q-R)\Delta p$ $\quad Q=Q_0+\left(Q_m-Q_0\right)\left(1-e^{-2\mu\left(q^-+\Delta q\right)}\right)$

$\Delta q=\eta H(F)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle\Delta p$

$$\boldsymbol{\Delta}\,\alpha_i=\frac{\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon^p-\gamma_i\alpha_i^-\Delta p}{1+\gamma_i\Delta p}\qquad n^*=\frac{3}{2}\frac{\varepsilon^p-\xi}{J_2\left(\varepsilon^p-\xi\right)}\qquad n=\frac{3}{2}\frac{\tilde{\sigma}-\frac{2}{3}C_1\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\alpha_2}{\left(\tilde{\sigma}-\frac{2}{3}C_1\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\alpha_2\right)_{eq}}$$

les 20 inconnues sont : $\tilde{\sigma}, \Delta\,\varepsilon^p, \Delta\,\xi, \Delta\,p, \Delta\,q$

2.3 Insertion de l'effet de non proportionnalité du chargement

De façon similaire au modèle `VISCOCHAB`, on peut insérer dans `VISC_CIN2_CHAB/MEMO` les équations traduisant l'effet non proportionnel. Le modèle obtenu est dénommé ici `VISC/VMIS_CIN2_NRAD`, ou `VISC/VMIS_MEMO_NRAD` (suivant que l'on prend en compte ou pas l'effet de mémoire).

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1&=\dot{\varepsilon}^p-\gamma_1(p)\alpha_1\dot{p}\\ \dot{\alpha}_2&=\dot{\varepsilon}^p-\gamma_2(p)\alpha_2\dot{p}\end{aligned} \quad \text{devient :} \quad \begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1&=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_1(p)\left(\delta_1\boldsymbol{\alpha}_1+(1-\delta_1)(\boldsymbol{\alpha}_1:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right)\dot{p}\\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2&=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_2(p)\left(\delta_2\boldsymbol{\alpha}_2+(1-\delta_2)(\boldsymbol{\alpha}_2:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right)\dot{p}\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{n}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)_{eq}}$ donc $\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1$ et en particulier $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Delta\,p\boldsymbol{n}$

Il est aisé de vérifier que cette nouvelle expression de l'évolution des variables internes $\boldsymbol{\alpha}_i$ revient à l'expression précédente dans le cas où $\delta_i=1$, ou bien en cas de **situation radiale** , où l'on peut poser $\boldsymbol{\alpha}_i=\xi\,\boldsymbol{n}$.

Il vient alors : $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_i\dot{p}\left(\delta_i\xi\boldsymbol{n}+(1-\delta_i)\xi\boldsymbol{n}\right)=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p-\gamma_i\dot{p}\boldsymbol{\alpha}_i$.

3 Intégration des relations de comportement

Pour réaliser numériquement l'intégration de la loi de comportement, on effectue une discrétisation en temps et on adopte un schéma d'Euler implicite, réputé approprié pour des relations de comportement élastoplastiques. Dorénavant, on emploiera les notations suivantes : A^- , A et $\Delta\,A$ représentent respectivement les valeurs d'une quantité au début et à la fin du pas de temps considéré ainsi que son incrément durant le pas. Le problème est alors le suivant : connaissant l'état au temps t^- ainsi que les incréments de déformation $\Delta\,\boldsymbol{\varepsilon}$ (issus de la phase de prédiction (cf. documentation de référence de `STAT_NON_LINE` [R5.03.01])) et de température $\Delta\,T$, déterminer l'état des variables internes au temps t ainsi que les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

On prend en compte les variations des caractéristiques par rapport à la température en remarquant que :

$$\sigma^H=\frac{K}{K^-}\sigma^{H^-}+K\,\mathrm{tr}\left(\Delta\,\varepsilon-\Delta\,\varepsilon^{\mathbf{th}}\right) \qquad \textbf{éq 2.2-1}$$

$$\tilde{\sigma}=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu\left(\Delta\,\tilde{\varepsilon}-\Delta\,\varepsilon^p\right)=\tilde{\sigma}^\varepsilon-2\mu\,\Delta\,\varepsilon^p \qquad \textbf{éq 2.2-2}$$

avec

$$\tilde{\sigma}^\varepsilon=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu\,\Delta\,\tilde{\varepsilon}$$

Au vu de l'équation [éq 2.2-1], on constate que le comportement hydrostatique est purement élastique si K est constant. Seul le traitement de la composante déviatorique est délicat.

En l'absence de terme visqueux, la relation de cohérence discrétisée est :

Régime élastique : $F\le 0$ et $\Delta\,p=0$
Régime plastique : $F=0$ et $\Delta\,p\ge 0$

En revanche, en présence de viscosité, la condition de cohérence est remplacée par l'équation [éq 2.1-10] qui, discrétisée, s'écrit :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\left(\frac{\langle F\rangle}{K}\right)^{N}\Leftrightarrow\langle F\rangle=K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

Autrement dit, en posant :

$$\tilde{F}=F-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

l'incrément de déformation viscoplastique cumulée est déterminé par :

$$\begin{array}{rl}\text{Régime élastique :} & \tilde{F}\leq 0 \;\text{ et }\; \Delta p=0\\ \text{Régime viscoplastique :} & \tilde{F}=0 \;\text{ et }\; \Delta p\geq 0\end{array}$$ **éq 2.2-3**

Finalement, en adoptant une discrétisation implicite, la seule différence entre les lois de comportement plastique et viscoplastique réside dans la forme de la fonction de charge F : on y observe un terme complémentaire en cas de viscosité. En fait, la plasticité incrémentale apparaît comme le cas limite de la viscoplasticité incrémentale lorsque K tend vers zéro. Cette convergence a déjà été décrite par J.L. Chaboche et G. Cailletaud dans [bib3].

Dans la suite de ce paragraphe, on détaillera donc l'intégration de la loi viscoplastique. Pour retrouver le cas du comportement plastique, il suffit de prendre $K=0$ dans les équations ci-dessous (on rappelle que l'utilisateur pour se placer dans ce cas doit obligatoirement enlever le mot-clé `LEMAITRE` ou `LEMAITRE_FO` de la commande `DEFI_MATERIAU`).

$$\tilde{\sigma}-X_1-X_2=\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\alpha_2^- -2\mu\Delta\varepsilon^p-\frac{2}{3}\left(C_1\Delta\alpha_1+C_2\Delta\alpha_2\right)$$

Les équations d'écoulement [éq 2.1-6] et [éq 2.1-7], une fois discrétisées, et la condition de cohérence [éq 2.2-3] s'écrivent (en remarquant que $p=\lambda$) :

$$\Delta\varepsilon^p=\frac{3}{2}\Delta p\frac{\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\alpha_2^- -2\mu\Delta\varepsilon^p-\frac{2}{3}C_1\Delta\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\Delta\alpha_2}{\left(\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\alpha_2^- -2\mu\Delta\varepsilon^p-\frac{2}{3}C_1\Delta\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\Delta\alpha_2\right)_{eq}}$$ **éq 2.2-4**

$$\tilde{F}\leq 0 \quad \Delta p\geq 0 \quad \tilde{F} \quad \Delta p=0$$ **éq 2.2-5**

Le traitement de la condition de cohérence (équation précédente) est classique. On commence par un essai élastique ($\Delta p=0$) qui est bien la solution si le critère de plasticité n'est pas dépassé, c'est-à-dire si :

$$\left(\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}C_1\left(p^-\right)\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\left(p^-\right)\alpha_2^-\right)_{eq}-R\left(p^-\right)<0$$ **éq 2.2-6**

Dans le cas contraire, la solution est plastique ($\Delta p>0$) et la condition de cohérence se réduit à $\tilde{F}=0$. Pour la résoudre, on montre qu'on peut se ramener à un problème scalaire en exprimant

$\Delta \varepsilon^p$ et $\Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2$ en fonction de Δp. En regroupant les équations du problème issu de la discrétisation implicite, on obtient le système d'équations :

$$\left(\tilde{\sigma}^e - \frac{2}{3} C_1 \alpha_1^- - \frac{2}{3} C_2 \alpha_2^- - 2\mu \Delta \varepsilon^p - \frac{2}{3} C_1 \Delta \alpha_1 - \frac{2}{3} C_2 \Delta \alpha_2\right)_{eq} = R(p) + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N} \qquad \text{éq 2.2-7}$$

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{3}{2} \Delta p \frac{\tilde{\sigma}^e - \frac{2}{3} C_1 \alpha_1^- - \frac{2}{3} C_2 \alpha_2^- - 2\mu \Delta \varepsilon^p - \frac{2}{3} C_1 \Delta \alpha_1 - \frac{2}{3} C_2 \Delta \alpha_2}{R(p) + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}} \qquad \text{éq 2.2-8}$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_1 &= \Delta \varepsilon^p - \gamma_1 \alpha_1 \Delta p \\ \Delta \alpha_2 &= \Delta \varepsilon^p - \gamma_2 \alpha_2 \Delta p \end{aligned} \qquad \text{éq 2.2-9}$$

Dans cette écriture, il faut bien noter que $p = p^- + \Delta p$ et $\alpha_i = \alpha_{i^-} + \Delta \alpha_i$ et que C_i, γ_i sont des fonctions de p. En considérant les trois dernières équations, ce système linéaire en $\Delta \varepsilon^p$ et $\Delta \alpha_i$ peut se résoudre pour exprimer ces quantités en fonction de Δp. En effet, il est équivalent à :

$$\Delta \varepsilon^p \left(R(p) + 3\mu \Delta p + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right) = \Delta p \left(\frac{3}{2} \tilde{\sigma}^e - C_1 \alpha_1^- - C_2 \alpha_2^- - C_1 \Delta \alpha_1 - C_2 \Delta \alpha_2\right) \qquad \text{éq 2.2-10}$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_1 (1 + \gamma_1 \Delta p) &= \Delta \varepsilon^p - \gamma_1 \alpha_1^- \Delta p \\ \Delta \alpha_2 (1 + \gamma_2 \Delta p) &= \Delta \varepsilon^p - \gamma_2 \alpha_2^- Dp \end{aligned} \qquad \text{éq 2.2-11}$$

En calculant $C_1 \Delta \alpha_1$ et $C_2 \Delta \alpha_2$ et en les remplaçant dans l'expression de $\Delta \varepsilon^p$ on obtient une expression de $\Delta \varepsilon^p$ en fonction de Δp seulement :

$$\begin{aligned} C_1 \Delta \alpha_1 &= \left(\frac{C_1}{1 + \gamma_1 \Delta p}\right) \Delta \varepsilon^p - \left(\frac{C_1 \gamma_1 \alpha_1^- \Delta p}{1 + \gamma_1 \Delta p}\right) = M_1(p) \Delta \varepsilon^p - M_1(p) \gamma_1 \Delta p\, \alpha_1^- \\ C_2 \Delta \alpha_2 &= \left(\frac{C_2}{1 + \gamma_2 \Delta p}\right) \Delta \varepsilon^p - \left(\frac{C_2 \gamma_2 \alpha_2^- \Delta p}{1 + \gamma_2 \Delta p}\right) = M_2(p) \Delta \varepsilon^p - M_2(p) \gamma_2 \Delta p\, \alpha_2^- \end{aligned} \qquad \text{éq 2.2-12}$$

$$\text{avec } M_i(p) = \frac{C_i(p)}{1 + \gamma_i(p) \Delta p}$$

En reportant cette expression dans l'expression de $\Delta \varepsilon^p$ on trouve :

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{1}{\left(R(p) + (3\mu + M_1 + M_2) \Delta p + K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right)} \left(\frac{3}{2} \Delta p\, \tilde{\sigma}^e - \Delta p \left((C_1 - M_1 \gamma_1 \Delta p)\, \alpha_1^- + (C_2 - M_2 \gamma_2 \Delta p)\, \alpha_2^-\right)\right)$$

ce qui se simplifie en :

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{1}{D(p)} \left(\frac{3}{2} \Delta p \tilde{\sigma}^e - \Delta p \left(M_1 \alpha_1^- + M_2 \alpha_2^- \right) \right)$$ **éq 2.2-13**

avec :

$$D(p) = R(p) + \left(3\mu + M_1(p) + M_2(p)\right) \Delta p + K \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/N}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à remplacer $\Delta \varepsilon^p$ dans les expressions de $C_1 \Delta \alpha_1$ et $C_2 \Delta \alpha_2$ pour exprimer ce terme en fonction de Δp par :

$$C_1 \Delta \alpha_1 = \frac{M_1}{D} \left(\frac{3}{2} \Delta p \tilde{\sigma}^e - \Delta p \left(M_1 \alpha_1^- + M_2 \alpha_2^- \right) \right) - M_1 \gamma_1 \Delta p \alpha_1^-$$
$$C_2 \Delta \alpha_2 = \frac{M_2}{D} \left(\frac{3}{2} \Delta p \tilde{\sigma}^e - \Delta p \left(M_1 \alpha_1^- + M_2 \alpha_2^- \right) \right) - M_2 \gamma_2 \Delta p \alpha_2^-$$

puis de substituer l'expression obtenue ainsi que $\Delta \varepsilon^p$ en fonction de Δp dans l'équation $\tilde{F} = 0$, et on obtient une équation scalaire en Δp à résoudre, à savoir :

$$\tilde{F}(p) = \left(\tilde{\sigma}^e - \frac{2}{3} C_1 \alpha_1^- - \frac{2}{3} C_2 \alpha_2^- - 2\mu \Delta \varepsilon^p - \frac{2}{3} C_1 \Delta \alpha_1 - \frac{2}{3} C_2 \Delta \alpha_2 \right)_{eq} - R(p) - K \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/N} = 0$$

ce qui se simplifie en :

$$\tilde{F}(p) = \frac{R(p) + K \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/N}}{D(p)} \left(\tilde{\sigma}^e - \frac{2}{3} M_1 \alpha_1^- - \frac{2}{3} M_2 \alpha_2^- \right)_{eq} - R(p) - K \left(\frac{\Delta p}{\Delta t} \right)^{1/N} = 0$$ **éq 2.2-14**

Cette équation scalaire en Δp est résolue numériquement, par une méthode de recherche de zéro de fonction (méthode de sécantes que l'on décrit brièvement dans l'annexe 2).

Elle est normée de la façon suivante :

$$\tilde{\tilde{F}}(p) = 1 - \frac{D(p)}{\left(\tilde{\sigma}^e - \frac{2}{3} M_1 \alpha_1^- - \frac{2}{3} M_2 \alpha_2^- \right)_{eq}} = 0$$ éq 2.2-15

Une fois déterminé Δp , on peut calculer $\Delta \varepsilon^p$ à l'aide de l'équation [éq 2.2-13] puis $\Delta \alpha_1$ et $\Delta \alpha_2$ à l'aide des équations [éq 2.2-11]. Il ne reste plus qu'à calculer le tenseur des contraintes, par les équations [éq 2.2-1] et [éq 2.2-2], et à actualiser les variables internes α_1 et α_2 .

Remarques :

- *un cas limite intéressant (pour la validation de ce modèle) se présente en posant $\gamma_i = 0$. On se retrouve alors exactement dans la situation de l'écrouissage cinématique linéaire (si $R(p) = \sigma_y$, [R5.03.02]) ou de l'écrouissage mixte pour $R(p)$ quelconque (cf. [R5.03.16]),*
- *ces modèles sont également disponibles en contraintes planes, par une méthode globale (condensation statique due à R. de Borst) [R5.03.03].*

3.1 Intégration des termes prenant en compte la non radialité

La discrétisation conduit à : $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p-\gamma_i\Delta p\left[\delta_i(\boldsymbol{\alpha}_i^-+\Delta\boldsymbol{\alpha}_i)+(1-\delta_i)((\boldsymbol{\alpha}_i^-+\Delta\boldsymbol{\alpha}_i):\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\right]$

Calculons $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p-\gamma_i\Delta p\left(\delta_i\sqrt{\frac{3}{2}}\beta_i+\delta_i\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}+(1-\delta_i)\sqrt{\frac{3}{2}}\beta_i+(1-\delta_i)(\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n})\right)$

en ayant posé $\boldsymbol{\alpha}_i^-:\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{3}{2}}\beta_i$. O n peut donc exprimer $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}$ en fonction de Δp et β_i

$\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}\left(1+\gamma_i\Delta p\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p\left(1-\gamma_i\beta_i\right)$ soit $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}=\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p\left(1-\gamma_i\beta_i\right)}{\left(1+\gamma_i\Delta p\right)}$

On peut donc exprimer $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i$ uniquement en fonction de Δp et $\beta_i=\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{\alpha}_i^-:\boldsymbol{n}$ et propager ces modifications dans la méthode de résolution utilisée précédemment :

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_i\left(1+\gamma_i\delta_i\Delta p\right)=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p-\gamma_i\Delta p\,\delta_i\boldsymbol{\alpha}_i^--\gamma_i\Delta p(1-\delta_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^-:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\gamma_i\Delta p(1-\delta_i)(\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

En utilisant l'expression de $\Delta\boldsymbol{\alpha}_i:\boldsymbol{n}$ en fonction de Δp et β_i ,

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_i\left(1+\gamma_i\delta_i\Delta p\right)=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p-\gamma_i\Delta p\,\delta_i\boldsymbol{\alpha}_i^--\gamma_i\Delta p(1-\delta_i)\sqrt{\frac{3}{2}}\beta_i\boldsymbol{n}-\gamma_i\Delta p(1-\delta_i)\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p\left(1-\gamma_i\beta_i\right)}{\left(1+\gamma_i\Delta p\right)}\boldsymbol{n}$$

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_i\left(1+\gamma_i\delta_i\Delta p\right)=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p-\gamma_i\Delta p\,\delta_i\boldsymbol{\alpha}_i^--\gamma_i(1-\delta_i)\frac{\beta_i+\Delta p}{1+\gamma_i\Delta p}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

$\Delta\boldsymbol{\alpha}_i\left(1+\gamma_i\delta_i\Delta p\right)=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p N_i(\Delta p,\beta_i)-\gamma_i\Delta p\,\delta_i\boldsymbol{\alpha}_i^-$ avec

$$N_i(\Delta p,\beta_i)=\frac{1+\gamma_i\Delta p\,\delta_i-\gamma_i(1-\delta_i)\beta_i}{1+\gamma_i\Delta p}$$

Là encore, on peut vérifier que si $\delta_i=1$, on retrouve les équations sans effet de non radialité.

Pour continuer à résoudre, il faut calculer :

$C_i\Delta\boldsymbol{\alpha}_i=M_iN_i\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p-\gamma_i\Delta p\,\delta_iM_i\boldsymbol{\alpha}_i^-$ avec $M_i=\dfrac{C_i}{\left(1+\gamma_i\delta_i\Delta p\right)}$

S i bien que le calcul de l' accroissement de déformation plastique est similaire au cas classique :

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p=\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta p\,\boldsymbol{n}$ avec $\boldsymbol{n}=\sqrt{\frac{3}{2}}\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{2}{3}C_1\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}C_2\boldsymbol{\alpha}_2\right)_{eq}}$.

En utilisant les expressions calculées précédemment ainsi que l'expression du critère :

$$\left(\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}C_1\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\alpha_2^- -2\mu\,\Delta\,\varepsilon^p-\frac{2}{3}C_1\Delta\,\alpha_1-\frac{2}{3}C_2\Delta\,\alpha_2\right)_{eq}=R(p)+K\left(\frac{\Delta\,p}{\Delta\,t}\right)^{1/N}$$ il vient :

$$\Delta\,\boldsymbol{\varepsilon}^p\left(R(p)+3K\left(\frac{\Delta\,p}{\Delta\,t}\right)^{1/N}+\Delta\,p(3\mu+M_1N_1+M_2N_2)\right)=\frac{3}{2}\Delta\,p\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)$$

donc $\boldsymbol{n}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\;\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-}{D}$ avec

$$D(\Delta\,p;\beta_1;\beta_2)=R(p)+K\left(\frac{\Delta\,p}{\Delta\,t}\right)^{1/N}+\Delta\,p\left(3\mu+M_1N_1+M_2N_2\right)$$

Remarque : l à encore, o n peut vérifier que dans le cas où on ne tient pas compte de l'effet non radial, $\delta_i=1$, ce qui entraîne $N=1$. On retrouve bien l'expression classique de la normale $\boldsymbol{n}$.

Dans le cas présent ; il y a 3 inconnues scalaires : $\Delta\,p$, β_1 , β_2 . En fait, il est possible d'exprimer β_1 et β_2 en fonction de $\Delta\,p$ en remarquant que :

$\boldsymbol{n}=\sqrt{(\dfrac{3}{2})}\dfrac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-}{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)_{eq}}$. On peut donc déterminer $\boldsymbol{n}$ en fonction de $\Delta\,p$ uniquement, puis calculer directement $\beta_i=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\boldsymbol{\alpha}_i^-:\boldsymbol{n}$, qui deviennent alors des fonctions explicites de $\Delta\,p$. Pour résoudre, il suffit de remplacer les expressions ci-dessus dans le critère (ce qui revient à écrire $\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1$) :

$$\tilde{\tilde{F}}(p)=\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\frac{2}{3}M_1\boldsymbol{\alpha}_1^- -\frac{2}{3}M_2\boldsymbol{\alpha}_2^-\right)_{eq}-D\left(\Delta\,p;\beta_1(\Delta\,p);\beta_2(\Delta\,p)\right)=0$$

3.2 Intégration de l'effet de mémoire

Dans le cas de l’effet de mémoire, la fonction $R(p)$ n’est plus connue explicitement, mais par l’intermédiaire du système d’équations :

1 eq : $f\left(\varepsilon^p,\xi,q\right)=\dfrac{2}{3}J_2\left(\varepsilon^p-\xi\right)-q=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}\left(\varepsilon^p-\xi\right):\left(\varepsilon^p-\xi\right)}-q\le 0$

6 eq : $\Delta\,\xi=\left(1-\eta\right)H\left(F\right)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle\Delta\,p\,n^*=\left(1-\eta\right)\dfrac{\Delta\,q}{\eta}n^*$

Avec

$\Delta\,R=b\left(Q-R\right)\Delta\,p$ $\qquad Q=Q_0+\left(Q_m-Q_0\right)\left(1-e^{-2\mu\left(q^-+\Delta\,q\right)}\right)$ $\qquad n^*=\dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon^p-\xi}{J_2\left(\varepsilon^p-\xi\right)}$

Connaissant Δp , on commence par calculer $f\left(\varepsilon^p, \xi^-, q^-\right)$.

Si cette quantité est négative, alors la solution du système gérant l'effet de mémoire est : $\Delta q=0, \Delta\xi=0$.

Dans le cas contraire, connaissant Δp ,il faut trouver Δq et $\Delta\xi$ tels que :

$$f\left(\varepsilon^p, \xi, q\right)=\frac{2}{3} J_2\left(\varepsilon^p-\xi^- -\Delta\xi\right)-q^- -\Delta q=0$$

$$\Delta\xi=\frac{(1-\eta)}{\eta}\Delta q\, n^*=\frac{(1-\eta)}{\eta}\Delta q\frac{3}{2}\frac{\varepsilon^{p-}+\Delta\varepsilon^p-\xi^- -\Delta\xi}{\frac{3}{2}\left(q^-+\Delta q\right)}$$

Car $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\frac{1}{D(p)}\left(\frac{3}{2}\Delta p\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e-\Delta p\left(M_1\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}^- + M_2\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}^-\right)\right)$ peut se calculer explicitement à partir de Δp .

Il reste :

$$\Delta\xi\left(1+\frac{(1-\eta)\Delta q}{\eta\left(q^-+\Delta q\right)}\right)=\frac{(1-\eta)}{\eta}\Delta q\frac{\varepsilon^{p-}+\Delta\varepsilon^p-\xi^-}{\left(q^-+\Delta q\right)}\Rightarrow$$

$$\Delta\xi\left(\eta q^-+\Delta q\right)=(1-\eta)\Delta q\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)\Rightarrow\Delta\xi=\frac{(1-\eta)\Delta q\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)}{\eta q^-+\Delta q}$$

en reportant dans l'équation de la surface seuil : $f\left(\varepsilon^p, \xi, q\right)=0$

$$\frac{2}{3} J_2\left(\varepsilon^p-\xi^- -\Delta\xi\right)-q^- -\Delta q=0=\frac{2}{3} J_2\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)\left|\left(1-\frac{(1-\eta)\Delta q}{\eta q^-+\Delta q}\right)\right|-q^- -\Delta q=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3} J_2\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)\left|\eta\left(q^-+\Delta q\right)\right|-\left(q^-+\Delta q\right)\left(\eta q^-+\Delta q\right)=0 \quad si \quad \eta q^-+\Delta q>0$$

ce qui permet de calculer explicitement Δq à partir de Δp :

$$\boxed{\Delta q=\eta\frac{2}{3} J_2\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\xi}^-\right)-\eta q^-}$$

Il reste alors à modifier la fonction d'écrouissage isotrope en calculant :

$$Q=Q_0+\left(Q_m-Q_0\right)\left(1-e^{-2\mu\left(q^-+\Delta q\right)}\right) \qquad \text{puis} \quad \Delta R=b\left(Q-R\right)\Delta p$$

On peut donc utiliser la résolution de l'équation scalaire en Δp (éq 2.2-14) en utilisant les expressions ci-dessus.

Remarques :

- Dans [bib2] on trouve également l'expression *:* $dq=\eta H(f)\langle\mathbf{n}:\mathbf{n}^*\rangle dp$.

Cette dernière équation résulte de l'expression en vitesse du multiplicateur. Dans la discrétisation implicite effectuée ici, elle n'est pas utilisée pour la résolution (puisque alors le système comporterait plus d'équations que d'inconnues). De plus, les 3 équations données dans [bib2] sont redondantes : en effet, connaissant $\Delta\varepsilon^p$ il faut déterminer une variable tensorielle $\Delta\xi$ et une variable scalaire . Δq Or nous avons une équation tensorielle et deux équations scalaires.

Ceci est dû au fait que l'équation $dq=\eta H(f)\langle\mathbf{n{:}n}^*\rangle dp$ est issue de la condition de cohérence $df=0$ (ce qui est précisé dans [bib2]) mais ne sert pas à la résolution implicite du problème.

$$df(\varepsilon^p,\xi,q)=\frac{\varepsilon^p-\xi}{J_2(\varepsilon^p-\xi)}d\varepsilon^p-\frac{\varepsilon^p-\xi}{J_2(\varepsilon^p-\xi)}d\xi-dq=n:n^*dp-n^*:n^*dq-dq=n:n^*dp-2dq=0$$

Elle serait utile pour une résolution explicite, en exprimant les dérivées par rapport au temps de toutes les variables cherchées.

- un critère intéressant, donné dans [bib2] permet d'ajuster les paramètres de l'effet de mémoire . En effet, en considérant un chargement de traction-compression simple, on doit trouver $q=\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^{p_{\max}}$ (en choisissant $\eta=\frac{1}{2}$) . Pour un point matériel en charge uniaxiale, les champs (uniformes) ont pour composantes :

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{\varepsilon}^p=p\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Dans ce cas, lors de la première charge uniaxiale dans la direction x :

$$\xi^-=0$$
$$q^-=0$$
$$\Delta q=\eta\varepsilon_x^p$$

Dans ce cas, $q=\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^{p_{\max}}$, implique que

$$\eta=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\Delta\xi=\frac{1}{2}(\varepsilon^p)$$

De plus, dans le cas d'un cycle de traction compression symétrique (en déformation plastique), on obtient, lors de la première décharge symétrique (avec $\eta=\frac{1}{2}$) :

$$\xi^-=\frac{1}{2}\varepsilon^{p_{\max}}$$
$$q^-=\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{p_{\max}}$$
$$\Delta q=\eta\left(\frac{2}{3}J_2(\varepsilon^p)-q^-\right)=\eta\left(|\varepsilon_{xx}^{p_{\min}}-\xi^-|-\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}^{p_{\max}}\right)=\frac{1}{2}|\varepsilon_{xx}^{p_{\min}}|$$
$$q=q^-+\Delta q=\varepsilon_{xx\max}^p=\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{xx}^p$$
$$\Delta\xi=\frac{(1-\eta)\Delta q(\varepsilon^p-\xi^-)}{\eta q^-+\Delta q}=-\frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{xx\max}^p$$
$$\xi=\xi^0+\Delta\xi=0$$

ce qui correspond bien au résultat attendu (cf. [bib2]) : domaine $F=0$ centré sur l'origine, et de rayon la demi-amplitude de déformation plastique.

3.3 Calcul de la rigidité tangente

Afin de permettre une résolution du problème global (équations d'équilibre) par une méthode de Newton [R5.03.01], il est nécessaire de déterminer la matrice tangente cohérente du problème incrémental.

Cette matrice se compose classiquement d'une contribution élastique et d'une contribution plastique :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=\frac{\delta\sigma^e}{\delta\varepsilon}-2\mu\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\varepsilon}$$ **éq 2.3-1**

avec $\sigma^e=\sigma+2\mu\Delta\varepsilon^p$, ce qui redonne en particulier $\tilde{\sigma}^e=\frac{\mu}{\mu^-}\tilde{\sigma}^-+2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}$

On en déduit immédiatement qu'en régime élastique (classique ou pseudo-décharge), la matrice tangente se réduit à la matrice élastique :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=\frac{\delta\sigma^e}{\delta\varepsilon}$$ **éq 2.3-2**

Pour cela, on adopte une fois de plus la convention d'écriture des tenseurs symétriques d'ordre 2 sous forme de vecteurs à 6 composantes. Ainsi, pour un tenseur a :

$$a={}^t\left[a_{xx}\quad a_{yy}\quad a_{zz}\ \sqrt{2}a_{xy}\quad \sqrt{2}a_{xz}\quad \sqrt{2}a_{yz}\right]$$ **éq 2.3-3**

Si on introduit en outre le vecteur hydrostatique 1 et la matrice de projection déviatorique P :

$$1={}^t\left[1\quad 1\quad 1\,0\quad 0\quad 0\right]$$ **éq 2.3-4**

$$P=\mathbf{Id}-\frac{1}{3}1\otimes 1$$ **éq 2.3-5**

où $\otimes$ est le produit tensoriel

Alors la matrice de rigidité tangente cohérente s'écrit pour un comportement élastique :

$$\frac{\partial\sigma^e}{\partial\Delta\varepsilon}=K\,1\otimes 1+2\mu\,P$$ **éq 2.3-6**

En revanche, en régime plastique, la variation de la déformation plastique n'est plus nulle.

On dérive par rapport à $\tilde{\sigma}^e$, sachant qu'on a :

$$\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\varepsilon}=\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}.\frac{\delta\tilde{\sigma}^e}{\delta\varepsilon}=2\mu\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}.P$$ **éq 2.3-7**

s espace des tenseurs symétriques
P projecteur sur les déviateurs

Pour calculer $\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$, on utilise l'expression de $\Delta\varepsilon^p$ en fonction de $\tilde{\sigma}_e$ et p :

$$\Delta\varepsilon^p=\frac{1}{D(p)}\left(\frac{3}{2}\Delta p\,\tilde{\sigma}_e-\Delta p\left(M_1\alpha_1^-+M_2\alpha_2^-\right)\right)$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta\varepsilon^p=A(p)\,\tilde{\sigma}_e+B_1(p)\alpha_1^-+B_2(p)\alpha_2^-$$

Donc :

$$\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}=A(p)\,\mathbf{Id}+\tilde{\sigma}^e\otimes\frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}+\frac{\delta B_1(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}\otimes\alpha_1^-+\frac{\delta B_2(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}\otimes\alpha_2^-$$

Les quantités du type $\frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}$ se calculent à l'aide de : $\frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}=\frac{\delta A(p)}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$

Finalement, il ne reste plus qu'à calculer la variation de p : $\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$

On utilise pour cela : $\tilde{F}(p,\tilde{\sigma}^e)=0$

$$\tilde{F}(p,\tilde{\sigma}_e)=\frac{R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}{D(p)}\left(\tilde{\sigma}^e-\frac{2}{3}M_1\alpha_1^--\frac{2}{3}M_2\alpha_2^-\right)_{eq}-R(p)-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}=0$$

$$\tilde{F}_{,p}(p,\tilde{\sigma}^e)\,\delta p\;=\;-\tilde{F}_{,\tilde{\sigma}^e}(p,\tilde{\sigma}^e)\,\delta\tilde{\sigma}^e\;\Rightarrow\;\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}\;=\;-\frac{\tilde{F}_{,\tilde{\sigma}^e}(p,\tilde{\sigma}^e)}{\tilde{F}_{,p}(p,\tilde{\sigma}^e)}\qquad\textbf{éq 2.3-8}$$

Le détail des calculs est donné en annexe 1.

La matrice tangente initiale, utilisée par l'option `RIGI_MECA_TANG` est obtenue en adoptant le comportement du pas précédent (élastique ou plastique, signifié par une variable interne ξ valant 0 ou 1) et en faisant tendre Δp vers zéro dans les équations précédentes.

3.4 Signification des variables internes

Les variables internes des deux modèles aux points de Gauss (`VELGA`) sont :

- `V1` = p : la déformation plastique cumulée (positive ou nulle)
- `V2` = ξ : valant n (nombre d'itérations internes) si le point de Gauss a plastifié au cours de l'incrément ou 0 sinon.

Les variables internes suivantes sont, pour la modélisation `3D` :

- Pour le modèle `VMIS/VISC_CIN1_CHAB`
  - `V3` = α_{1xx}
  - `V4` = α_{1yy}
  - `V5` = α_{1zz}
  - `V6` = α_{1xy}
  - `V7` = α_{1xz}

    - `V8` = $\alpha_{1\,yz}$

- Pour le modèle `VMIS/VISC_CIN2_CHAB`
    - `V3` = $\alpha_{1\,xx}$
    - `V4` = $\alpha_{1\,yy}$
    - `V5` = $\alpha_{1\,zz}$
    - `V6` = $\alpha_{1\,xy}$
    - `V7` = $\alpha_{1\,xz}$
    - `V8` = $\alpha_{1\,yz}$
    - `V9` = $\alpha_{2\,xx}$
    - `V10` = $\alpha_{2\,yy}$
    - `V11` = $\alpha_{2\,zz}$
    - `V12` = $\alpha_{2\,xy}$
    - `V13` = $\alpha_{2\,xz}$
    - `V14` = $\alpha_{2\,yz}$
    -

  Pour les modélisations `C_PLAN`, `D_PLAN`, et `AXIS` :

    - `V7` = 0
    - `V8` = 0
    - `V13` = 0
    - `V14` = 0

- Pour le modèle `VMIS/VISC_CIN2_MEMO`
    - `V3` = $\alpha_{1\,xx}$
    - `V4` = $\alpha_{1\,yy}$
    - `V5` = $\alpha_{1\,zz}$
    - `V6` = $\alpha_{1\,xy}$
    - `V7` = $\alpha_{1\,xz}$
    - `V8` = $\alpha_{1\,yz}$
    - `V9` = $\alpha_{2\,xx}$
    - `V10` = $\alpha_{2\,yy}$
    - `V11` = $\alpha_{2\,zz}$
    - `V12` = $\alpha_{2\,xy}$
    - `V13` = $\alpha_{2\,xz}$
    - `V14` = $\alpha_{2\,yz}$
    - `V15` = $R(p)$
    - `V16` = q
    - `V17` = ξ_{xx}
    - `V18` = ξ_{yy}
    - `V19` = ξ_{zz}
    - `V20` = ξ_{xy}

- `V21` = ξ_{xz}
- `V22` = ξ_{yz}
-
- `V23` = $\varepsilon^{p}{}_{xx}$
- `V24` = $\varepsilon^{p}{}_{yy}$
- `V25` = $\varepsilon^{p}{}_{zz}$
- `V26` = $\varepsilon^{p}{}_{xy}$
- `V27` = $\varepsilon^{p}{}_{xz}$
- `V28` = $\varepsilon^{p}{}_{yz}$

4 Principe de l'identification des paramètres du modèle.

Dans le cas le plus simple (une seule variable cinématique, $\gamma_1=cste\,,C_1=cste\quad,R(p)=\sigma_y$) les coefficients du modèle γ_1, C_1 peuvent être identifiés sur un essai de traction simple uniaxial, ou bien sur une courbe d'écrouissage cyclique.

En effet dans le cas uni-axial, le modèle se réduit en 1D à [bib2] :

$$dX_1=C_1 d\,\varepsilon^p-\gamma_1 X_1 \xi d\,\varepsilon^p, \xi=\pm 1$$
$$|\sigma-X_1|=\sigma_y$$

que l'on peut intégrer (en chargement monotone) de la manière suivante :

$$X_1=\xi\frac{C_1}{\gamma_1}+\left(X_1^0-\xi\frac{C_1}{\gamma_1}\right)\exp\left(-\xi\gamma_1\left(\varepsilon^p-\varepsilon_0^p\right)\right), \xi=\pm 1$$
$$\sigma=\xi\sigma_y+X_1$$

dont l'asymptote de la courbe de traction permet d'obtenir $\frac{C_1}{\gamma_1}$ par :

$\varepsilon^p\rightarrow\infty\quad X_1\rightarrow\xi\frac{C_1}{\gamma_1}$ donc $\sigma\rightarrow\xi\left(\sigma_y+\frac{C_1}{\gamma_1}\right)$

et dont la pente à l'origine fournit C_1 (si $X_1^0=0$) :

$$\varepsilon^p\rightarrow 0\quad \dot{X}_1\rightarrow C_1-y_1 X_1^0\xi\quad X_1^0=C_1-y_1 X_1\xi$$

Pour un modèle a deux variables cinématiques, sans écrouissage isotrope, une courbe de traction permet encore de retrouver ces relations :

$\varepsilon^p\rightarrow\infty\quad\sigma\rightarrow\xi\left(\sigma_y+\left(\frac{C_1}{\gamma_1}+\frac{C_2}{\gamma_2}\right)\right)$ et la pente à l'origine vaut C_1+C_2

Mais en dehors de ces cas simples une identification numérique est nécessaire pour obtenir les paramètres. On pourra faire cette identification par exemple sur des essais de traction compression à déformation imposée. (cf. 10).

5 Éléments de validation.

Les tests permettant la validation élémentaire de ces comportements sont :

test	titre	comportement(s)	
	tests élémentaires de robustesse		
comp001f	test de robustesse loi de comportement 3d VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN1_CHAB	
comp001g	test de robustesse loi de comportement 3d VMIS_CIN2_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB	
comp002b	test de robustesse loi de comportement 3d VISC_CIN1_CHAB	VISC_CIN1_CHAB	
comp002c	test de robustesse loi de comportement 3d VISC_CIN2_CHAB	VISC_CIN2_CHAB	
comp002h	test de robustesse loi de comportement 3d VISC_CIN2_MEMO	VISC_CIN2_MEMO	
comp008g	variation température dans le comportement VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN1_CHAB	
comp008h	variation température dans le comportement VMIS_CIN2_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB	
comp008j	variation température dans le comportement VISC_CIN1_CHAB	VISC_CIN1_CHAB	
comp008k	variation température dans le comportement VISC_CIN2_CHAB	VISC_CIN2_CHAB	
comp008i	variation température dans le comportement VMIS_CIN2_MEMO	VMIS_CIN2_MEMO	
comp008l	variation température dans le comportement VISC_CIN2_MEMO	VISC_CIN2_MEMO	
	tests thermo-plastiques de l'IPSI		
hsnv124c	test phi2as numéro 1	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
hsnv124d	test phi2as numéro 1	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
hsnv125c	test phi2as numéro 2 : traction, cisaillement, température variables	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
hsnv125e	test phi2as numéro 2 : traction, cisaillement, température variables	VMIS_CIN2_MEMO	
	recalage		
ssna109a	modèle VISC_CIN2_CHAB à 550 degrés, viscosité prédominante	VISC_CIN2_CHAB	
ssna110a	recalage modèle VISC_CIN2_CHAB sur 4 courbes de traction	VISC_CIN2_CHAB	
	effet de mémoire		
ssnd105a	essai de traction avec mémoire maxi d'ecrouissage	VMIS_CIN2_MEMO	
ssnd105b	essai de traction avec mémoire maxi d'ecrouissage	VISC_CIN2_MEMO	
ssnd105c	traction avec mémoire maxi d'ecrouissage axis	VISC_CIN2_MEMO	
ssnd111a	validation effet de mémoire VISC_CIN2_MEMO	VISC_CIN2_MEMO	
	Traction-cisaillement		
ssnv101b	essai de traction-cisaillement en contraintes planes (chaboche)	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
ssnv101c	essai de traction-cisaillement 3d (chaboche)	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
ssnv101d	essai de traction-cisaillement en deformations planes (chaboche)	VMIS_CIN1_CHAB	VMIS_CIN2_CHAB
ssnv118d	essai de traction cisaillement en 3d (viscochab / VISC_CIN2_MEMO)	VISC_CIN1_CHAB	VISC_CIN2_CHAB
	grandes déformations		
ssnd107b	tractions-rotations multiples gdef_log en 3d cinématique	VMIS_CIN2_CHAB	VMIS_CIN2_MEMO
	Effet de non proportionnalité		
ssnd105d	essai de traction avec mémoire maxi d'ecrouissage et non radialité	VMIS_CIN2_NRAD	VISC_CIN2_NRAD
ssnd115a	essai de traction-torsion avec chargement non proportionnel	VMIS_CIN2_NRAD	

Une validation par rapport à des résultats expérimentaux a été effectuée dans (cf. 10), sur des essais de traction compression et de traction-torsion. Elle permet de mettre en évidence l'effet de mémoire et de non proportionnalité.

6 Bibliographie

1 P. MIALON, Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité. EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches - Série C - N° 3 1986, p. 57 - 89.

2 J.LEMAITRE, J.L.CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides. Dunod 1996

3 J.L.CHABOCHE, G.CAILLETAUD, Integration methods for complex constitutive equations, Computer Methods in Applied Machanics Engineering, N°133 (1996), pp 125-155

4 J.L.CHABOCHE, Cyclic viscoplastic constitutive equations, Journal of Applied Mechanics, Vol.60, Décembre 1993, pp. 813-828

5 R.FORTUNIER, Loi de comportement de Chaboche : identification des paramètres élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques de l'acier EDF-SPH entre 20°C et 600°C. Note FRAMATOME/NOVATOME, NOVTUDD90011, Octobre 1990

6 C.MIGNE, Recalage des paramètres du modèle de plasticité cinématique non linéaire de SYSTUS. Modélisation du phénomène de déformation progressive avec consolidation cyclique du matériau. Note FRAMATOME EE/R.DC.0286. Septembre 1992.

7 J.J.ENGEL, G.ROUSSELIER, Comportement en contrainte uniaxiale sous chargement cyclique de l'acier inoxydable austénitique 17-12 Mo à très bas carbone et azote contrôle. Identification de 20)C à 600°C d'un modèle de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire. Note EDF/DER/EMA N°D599 MAT/T43 (1985)

8 P.GEYER, C.COUTEROT, caractérisation de l'acier 304L utilisé lors des essais « déformation, progressive » sur CUMULUS et identification des paramètres du modèle de Chaboche, Note EDF/DER/ HT-26/93/040/A

9 R . DE BORST « the zero normal stress condition in plane stress and shell elastoplasticity » Communications in applied numerical methods, Vol 7, 29-33 (1991)

10 J.M.PROIX « Comportement viscoplastique prenant en compte la non proportionnalité du chargement» EDF R&D-CR-AMA12-284, 12/12/12

11 J.L.CHABOCHE, A review of some plasticity and viscoplasticity constitutives theories, Inter. Journal of Plasticity, Vol.24, 2008, pp. 1642-1693

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
5	P.Schoenberger EDF/R&D/MMN	Texte initial, loi de Chaboche
7	E.Lorentz, J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Ajout des lois `VMIS_CIN1_CHAB`, `VMIS_CIN2_CHAB`
8	P. de Bonnières, J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Ajout de la viscosité : lois `VISC_CIN1_CHAB` et `VISC_CIN2_CHAB`, et suppression de la loi `CHABOCHE`.
9.3	J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Ajout de la loi `VMIS/VISC_CIN2_MEMO`, prenant en compte l'effet de mémoire de l'écrouissage maximal.
11 3	J.M.Proix EDF/R&D/AMA	Ajout de la loi `VMIS/VISC_CIN2_NRAD`, prenant en compte l'effet de non proportionnalité du chargement.
12.1	J.M.Proix	Ajout de la remarque sur la positivité des coefficients k et w, fiche

	EDF/R&D/AMA	21019

Annexe 1 Matrice de comportement tangente

Pour obtenir le comportement tangent dans le cas élastoplastique, il faut calculer $\frac{d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p}{d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e}$ [éq 2.3-7].

On utilise pour cela l'expression de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ en fonction de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^e$ et p, qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta\varepsilon^p=\frac{3\Delta p}{2\mathrm{D}(p)}\tilde{\sigma}_e+B_1^*(p)\alpha_1^-+B_2^*(p)\alpha_2^-$$

avec

$$B_i^*(p)=-\Delta p\frac{M_i(p)}{D(p)}$$
$$M_i(p)=\frac{C_i(p)}{1+\delta_i\gamma_i(p)\Delta p}$$
$$D(p)=R(p)+\left(3\mu+M_1(p)N_1(p,\beta_1)+M_2(p)N_2(p,\beta_2)\right)\Delta p+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

On rappelle les définitions suivantes :

$$R(p)=R_\infty+(R_0-R_\infty)e^{-bp}$$
$$C_i(p)=C_i^\infty\left(1+(k-1)e^{-wp}\right)$$
$$\gamma_i(p)=\gamma_i^0\left(a_\infty+(1-a_\infty)e^{-bp}\right)$$

donc :

$$\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}=\frac{3\Delta p}{2\mathrm{D}(p)}\mathbf{Id}+\frac{\delta\left(\frac{3\Delta p}{2\mathrm{D}(p)}\right)}{\delta\tilde{\sigma}^e}\otimes\tilde{\sigma}^e+\frac{\delta B_1^*(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}\otimes\alpha_1^-+\frac{\delta B_2^*(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}\otimes\alpha_2^-$$

Les quantités du type $\frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}$ se calculent à l'aide de : $\frac{\delta A(p)}{\delta\tilde{\sigma}^e}=\frac{\delta A(p)}{\delta p}\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$

Ces différents termes s'expriment par :

- $\frac{\delta\left(\frac{3\Delta p}{2\mathrm{D}(p)}\right)}{\delta p}=\frac{3}{2}I(p)$ avec $I(p)=\frac{1}{D(p)}-\frac{D'(p)}{D^2(p)}\Delta p$
- $\frac{\delta B_i^*(p)}{\delta p}=-\frac{M_i'(p)}{D(p)}\Delta p-M_i(p).I(p)=H_i(p)$

Détaillons le calcul de D' :

- Dans le cas de l'effet de mémoire, il suffit de modifier le terme $R'(p)$.

Comme $R=R^-+\Delta R=R^-+b\frac{\left(Q(\Delta p)-R^-\right)}{1+b\Delta p}\Delta p=R^-+\frac{b\Delta p}{1+b\Delta p}\left(Q_M+(Q_0-Q_M)e^{-2\mu q}-R^-\right)$

$$R'(p)=\frac{b}{1+b\Delta p}\left(\frac{Q-R^-}{1+b\Delta p}-2\mu\Delta p(Q-Q_M)\frac{\partial\Delta q}{\partial\Delta p}\right)=\frac{b}{1+b\Delta p}\left(\frac{Q-R^-}{1+b\Delta p}-2\mu\Delta\mathrm{p}(Q_0-Q_M)\frac{\partial\Delta q}{\partial\Delta p}\right)$$

or $\Delta q=\eta\left(\frac{2}{3}J_2\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)-q^-\right)$ donc $\frac{\partial\Delta q}{\partial\Delta p}=\eta\frac{\varepsilon^p-\xi^-}{J_2\left(\varepsilon^p-\xi^-\right)}\frac{\partial\varepsilon^p}{\partial\Delta p}$

et $\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\Delta p}=\frac{\delta\left(\frac{3\Delta p}{2D(p)}\right)}{\delta\Delta p}\tilde{\sigma}^e+\frac{\delta B_1^*(p)}{\delta\Delta p}\alpha_1^-+\frac{\delta B_2^*(p)}{\delta\Delta p}\alpha_2^-=\frac{3}{2}I(\Delta p)\tilde{\sigma}^e+H_1^*(\Delta p)\alpha_1^-+H_2^*(\Delta p)\alpha_2^-$

- Dans le cas de non proportionnalité ($\delta_1\neq 1$ ou $\delta_2\neq 1$), quelques dérivées sont modifiées :

$$M'_i(p)=\frac{C'_i(p)}{1+\delta_i\gamma_i(p)\Delta p}-\frac{C_i(p)}{(1+\delta_i\gamma_i(p)\Delta p)^2}\left(\gamma'_i\delta_i\Delta p+\gamma_i\delta_i\right)$$

$$D'=R'+\frac{K}{N\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{N}-1}+3\mu+M_1N_1+M_2N_2+\Delta p(M'_1N_1+M'_2N_2+M_1N'_1+M_2N'_2)$$

avec $N'_i=\frac{1+\gamma'_i(\delta_i\Delta p+(\delta_i-1)\beta_i)+\gamma_i(\delta_i+(\delta_i-1)\beta'_i)-N_i(\gamma_i+\gamma'_i\Delta p)}{1+\gamma_i\Delta p}$

Il reste à calculer : $\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$

On utilise donc, suivant [éq 2.3-8] : $\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}=-\frac{\tilde{F}_{,\tilde{\sigma}^e}(p,\tilde{\sigma}^e)}{\tilde{F}_{,p}(p,\tilde{\sigma}^e)}$

$$\tilde{F}(p,\tilde{\sigma}^e)=S_{eq}(p,\tilde{\sigma}^e)-R(p)-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}=G(p,\tilde{\sigma}^e)-R(p)-K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$$

avec $S=A\tilde{\sigma}^e+B_1\alpha_1^-+B_2\alpha_2^-$ $\quad A=\frac{R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}}{D(p)}$ $\quad B_i=-\frac{2}{3}\frac{M_i(p)\left(R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}\right)}{D(p)}$

Alors, en posant $R_v(p)=R(p)+K\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{1/N}$:

$$\frac{\delta p}{\delta\tilde{\sigma}^e}=-\frac{G_{,\tilde{\sigma}^e}(p,\tilde{\sigma}^e)}{G_{,p}(p,\tilde{\sigma}^e)-R'_v(p)}=-\frac{\frac{3}{2}\frac{R_v(p)}{D(p)}\frac{S}{S_{eq}}}{\frac{3}{2}\frac{S}{S_{eq}}:S_{,p}-R'_v(p)}=-\frac{3}{2}\frac{\frac{R_v}{DS_{eq}}\left(A\tilde{\sigma}^e+B_1\alpha_1^-+B_2\alpha_2^-\right)}{\frac{3}{2}\frac{S}{S_{eq}}:S_{,p}-R'_v(p)}$$
$$=-\frac{3}{2}\frac{L_1(p).\tilde{\sigma}^e+L_{21}(p)\alpha_1^-+L_{22}(p)\alpha_2^-}{L_3(p)}$$

¿
avec

$$L_1(p)=\frac{R_v^2(p)}{D^2(p)\times S_{eq}}=\frac{A^2(p)}{S_{eq}}$$

$$L_{21}(p)=\frac{R_v(p)}{D(p)}B_1(p)\frac{1}{S_{eq}} \qquad L_{22}(p)=\frac{R_v(p)}{D(p)}B_2(p)\frac{1}{S_{eq}}$$

¿

$$L_3(p)=\frac{3}{2}\frac{S}{S_{eq}}:\left(A'(p)\tilde{\sigma}^e+B_1'(p)\alpha_1^-+B_2'(p)\alpha_2^-\right)-R'(p)-\frac{K}{N\Delta t}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{N}-1}$$

Finalement, $\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}$ se met sous la forme :

$$\frac{\delta\Delta\varepsilon^p}{\delta\tilde{\sigma}^e}=\frac{3}{2}\frac{\Delta p}{D(p)}\mathbf{Id}+\frac{3}{2}\left(I_S(p)\tilde{\sigma}^e+I_{a1}(p)\alpha_1^-+I_{a2}(p)\alpha_2^-\right)\otimes\tilde{\sigma}^e$$
$$+\left(H_s^1\tilde{\sigma}^e+H_{a1}^1\alpha_1^-+H_{a2}^1\alpha_2^-\right)\otimes\alpha_1^-$$
$$+\left(H_s^2\tilde{\sigma}^e+H_{a1}^2\alpha_1^-+H_{a2}^2\alpha_2^-\right)\otimes\alpha_2^-$$

avec :

$$I_S(p)=-\frac{3}{2}I(p).\frac{L_1(p)}{L_3(p)} \qquad I_{a1}(p)=-\frac{3}{2}\frac{I(p)L_{21}(p)}{L_3(p)}$$

$$I_{a2}(p)=-\frac{3}{2}\frac{I(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

$$H_s^1(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_1(p).L_1(p)}{L_3(p)}\;H_{a1}^1(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_1(p)L_{21}(p)}{L_3(p)}\;H_{a2}^1(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_1(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

$$H_s^2(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_2(p).L_1(p)}{L_3(p)}\;H_{a1}^2(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_2(p)L_{21}(p)}{L_3(p)}\;H_{a2}^2(p)=-\frac{3}{2}\frac{H_2(p)L_{22}(p)}{L_3(p)}$$

Annexe 2 Résolution de l'équation f(△p) = 0

Il s'agit de résoudre une équation scalaire non linéaire en cherchant la solution dans un intervalle de confiance. Pour cela, on se propose de coupler une méthode de sécante avec un contrôle de l'intervalle de recherche. Soit l'équation suivante à résoudre :

$$f(x)=0\,,\; x\in[a,b]\,,\; f(a)<0\,,\; f(b)>0 \qquad \textbf{éq A2-1}$$

La méthode de la sécante consiste à construire une suite de points x^n qui converge vers la solution. Elle est définie par récurrence (approximation linéaire de la fonction par sa corde) :

$$x^{n+1}=x^{n-1}-f(x^{n-1})\frac{x^n-x^{n-1}}{f(x^n)-f(x^{n-1})} \qquad \textbf{éq A2-2}$$

Par ailleurs, si x^{n+1} devait sortir de l'intervalle, alors on le remplace par la borne de l'intervalle en question :

$$\begin{cases}\text{si } x^{n+1}<a \text{ alors } x^{n+1}:=a\\ \text{si } x^{n+1}>b \text{ alors } x^{n+1}:=b\end{cases} \qquad \textbf{éq A2-3}$$

En revanche, si x^{n+1} est dans l'intervalle courant, alors on réactualise l'intervalle :

$$\begin{cases}\text{si } x^{n+1}\in[a,b] \text{ et } f(x^{n+1})<0 \text{ alors } a=x^{n+1}\\ \text{si } x^{n+1}\in[a,b] \text{ et } f(x^{n+1})>0 \text{ alors } b=x^{n+1}\end{cases} \qquad \textbf{éq A2-4}$$

On considère avoir convergé lorsque f est suffisamment proche de 0 (tolérance à renseigner). Quant aux deux premiers points de la suite, on peut choisir les bornes de l'intervalle, ou bien, si on dispose d'une estimation de la solution, on peut adopter cette estimation et l'une des bornes de l'intervalle.

Remarque :

Cette méthode fonctionne bien si il y a une seule solution dans l'intervalle $[a,b]$ *. Sans que cela soit formellement démontré, on peut constater que* $f(0)>0$ *.*
On cherche alors b *tel que* $f(b)<0$ *.*
On part pour cela de $b=\dfrac{\left(\tilde{s}^e\frac{2}{3}C_1\alpha_1^- -\frac{2}{3}C_2\alpha_2^-\right)_{eq}-R(p^-)}{3\mathrm{m}}$
Si $f(b)>0$ *, on multiplie* b *par 10 et on teste si* $f(b)>0$ *, et ainsi de suite, jusqu'à trouver une valeur* b *telle que* $f(b)<0$ *.*
On est sûr qu'il y a alors au moins une solution sur $[a,b]$ *.*