
SDLD30 - Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses et 3 ressorts multi-supporté

Résumé :

Le problème consiste à calculer la réponse spectrale d'un système 2 masses - 3 ressorts soumis à une excitation sismique multiple.

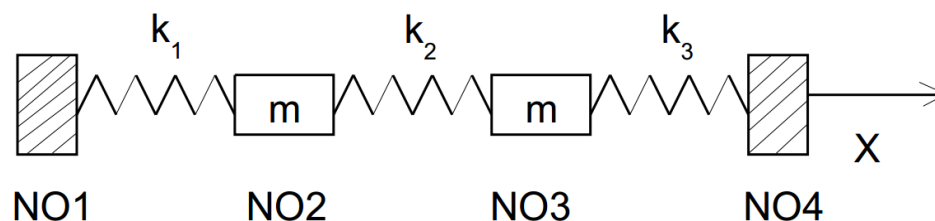
On teste l'élément discret en traction, le calcul des modes propres, des modes statiques et de la réponse spectrale par superposition modale via l'opérateur `COMB_SISM_MODAL`. Différents cumuls sont testés lors du calcul des réponses d'appuis.

Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats analytiques de référence.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est modélisée par un ensemble de 3 ressorts et de 2 masses ponctuelles.



1.2 Propriétés de matériaux

Raideur de liaison : $k_1 = k_2 = k = 1000 \text{ N/m}$; $k_3 = 10k = 10000 \text{ N/m}$
masse ponctuelle : $m_2 = m_3 = m = 10 \text{ kg}$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

- **conditions aux limites**

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .

Les points $NO1$ et $NO4$ sont encastrés : $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$.

Les autres points sont libres en translation selon la direction x : $DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$.

- **chargement**

La structure est soumise à une excitation sismique spectrale multiple et à des déplacements différentiels.

Les spectres de réponses d'oscillateur en pseudo accélération sont simplifiés. Seules les valeurs correspondant aux 2 fréquences propres du système sont mentionnées. Elles ne dépendent pas de l'amortissement :

- au nœud $NO1$:

$$SRO_{NO1}(f_1) = A_{11} = 7 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO1}(f_2) = A_{21} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO1} = D_1 = -0.04 \text{ m}$$

- au nœud $NO4$:

$$SRO_{NO4}(f_1) = A_{12} = 12 \text{ m/s}^2$$

$$SRO_{NO4}(f_2) = A_{22} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$DDS_{NO4} = D_2 = 0.06 \text{ m}$$

1.4 Conditions initiales

Le système est initialement au repos.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule la réponse spectrale par superposition modale d'un système masse ressort soumis à deux excitations distinctes. On détermine le déplacement des masses et les réactions d'appui aux nœuds *NO1* et *NO4* suivant l'axe *x*.

On calcule analytiquement :

- les fréquences propres f_i ,
- les vecteurs propres associés φ_{Ni} normalisés par rapport à la masse modale,
- les modes statiques d'appuis ψ_j du système,
- les facteurs de participation modale P_{ij} relatif aux appuis,
- Rm_{ij} le maximum de la réponse de chaque mode à partir des spectres d'excitation,
- Re_j la contribution du mouvement d'entraînement de chaque appui à partir des déplacements différentiels,
- Rc_j le terme de correction statique,
- les composantes primaires et secondaires de la réponse en fonction des règles de cumul adoptées.

2.2 Résultats de référence

- matrice de rigidité K

$$K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 11k & -10k \\ 0 & 0 & -10k & 10k \end{bmatrix}$$

$$K^p = \begin{bmatrix} 2k & -k & -k & 0 \\ -k & 11k & 0 & -10k \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & -10k & 0 & 10k \end{bmatrix}$$

matrice partitionnée degrés de liberté de structure 2, 3, degrés de liberté de support 1, 4

$$K^p = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xs} \\ k_{sx} & k_{ss} \end{bmatrix}$$

$$k_{xx} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 11k \end{bmatrix}$$

$$k_{xs} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10k \end{bmatrix}$$

$$k_{sx} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & -10k \end{bmatrix}$$

$$k_{ss} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 10k \end{bmatrix}$$

- matrice de masse M

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- calcul modal en base encastrée

$$k_{xx} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 11k \end{bmatrix}$$

$$(k_{xx} - \lambda_i m_{xx} \varphi_i) = 0 \quad \lambda_i = \omega_i^2$$

soit $\lambda_1 = \frac{k}{2m} (13 - \sqrt{85}) \quad \lambda_2 = \frac{k}{2m} (13 + \sqrt{85})$

1) fréquences propres :

$$\text{soit } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

1) modes propres non normés :

$$\text{soit } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (-9 + \sqrt{85})/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ (9 + \sqrt{85})/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- masses modales généralisées $\mu_i = \varphi_i^T M \varphi_i$:

$$\text{soit } \mu_1 = \frac{m}{4} (170 - 18\sqrt{85}) \quad \mu_2 = \frac{m}{4} (170 + 18\sqrt{85})$$

[1] modes propres normés à la masse modale généralisée unitaire φ_{Ni} :

$$\text{soit } \varphi_{N1} = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\mu_1}} \quad \varphi_{N2} = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\mu_2}}$$

- réactions modales Fm_i :

$$r_i = k_{sx} \varphi_{Nis} \quad \varphi_{Ni}^p = \begin{pmatrix} \varphi_{Nix} \\ \varphi_{Nis} \end{pmatrix} \quad Fm_i^p = \begin{pmatrix} 0 \\ r_i \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } Fm_1 = \frac{k}{\sqrt{\mu_1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5(9 - \sqrt{85}) \end{pmatrix} \quad Fm_2 = \frac{k}{\sqrt{\mu_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -5(9 + \sqrt{85}) \end{pmatrix}$$

- facteurs de participation modale $P_{ij} = \varphi_i^T M \psi_j$:

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud *NO1* :

$$P_{11} = {}^T \varphi_1 M \psi_1 = \frac{m}{42\sqrt{\mu_1}} (13 + \sqrt{85})$$

- contribution du mode dynamique 1 au mouvement imposé au nœud *NO4* :

$$P_{12} = {}^T \varphi_1 M \psi_2 = \frac{10m}{21\sqrt{\mu_1}} (-8 + \sqrt{85})$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud *NO1* :

$$P_{21} = {}^T \varphi_2 M \psi_1 = \frac{m}{42\sqrt{\mu_2}} (-13 + \sqrt{85})$$

- contribution du mode dynamique 2 au mouvement imposé au nœud *NO4* :

$$P_{22} = {}^T \varphi_2 M \psi_2 = \frac{10m}{21\sqrt{\mu_2}} (8 + \sqrt{85})$$

- facteur de participation du mode dynamique 1 dans la direction *X* :

$$P_{1X} = P_{11} + P_{12}$$

- facteur de participation du mode dynamique 2 dans la direction *X* :

$$P_{2X} = P_{21} + P_{22}$$

- **modes statiques d'appuis** ψ_j

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO1* :

$$\text{déplacements : } \psi_1 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F_{S1} = K \psi_1 = \frac{10}{21} k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- solution statique à un déplacement unitaire du nœud *NO4* :

$$\text{déplacements : } \psi_2 = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F_{S2} = K \psi_2 = \frac{10}{21} k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **réponse du mode *i* au mouvement de l'appui *j***

$$Rm_{ij} = r_i P_{ij} \frac{A_{ij}}{\omega_i^2} \quad \text{avec } r_i = \varphi_{Ni} \quad \text{ou } Fm_i$$

- **correction statique**

- modes statiques u_j solution de $K u_j = M \psi_j$:

$$\text{déplacements : } u_1 = \frac{m}{441k} \begin{pmatrix} 0 \\ 122 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F u_1 = \frac{m}{441} \begin{pmatrix} -122 \\ 231 \\ 21 \\ -130 \end{pmatrix}$$

$$\text{déplacements : } u_2 = \frac{m}{441 k} \begin{pmatrix} 0 \\ 130 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{réactions nodales : } F u_2 = \frac{m}{441} \begin{pmatrix} -130 \\ 210 \\ 420 \\ -500 \end{pmatrix}$$

- correction statique relative au mouvement de l'appui j si le mode 2 n'est pas retenu :

$$Rc_j = \left(ru_j - \frac{P_{1j} r_1}{\omega_1^2} \right) A_{1j} \quad \text{avec : } ru_j = u_j \text{ ou } Fu_j \text{ et } r_1 = \varphi_{NI} \text{ ou } Fm_1$$

- contribution de l'appui j au mouvement d'entraînement

$$Re_j = r_j D_j \quad \text{avec } r_j = \psi_j \text{ ou } Fs_j$$

Ces calculs analytiques sont décrits dans le fichier Matlab sld30a.55.

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune (solution analytique exacte).

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le système est modélisé par :

- 3 éléments discrets $K_T_D_L$,
- 2 éléments discrets $M_T_D_N$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 3 mailles SEG2.

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Fréquences propres

MODE	Référence
1	2,18815E+00
2	5,30484E+00

4.2 Réponse globale sur base modale complète

Les modes 1 et 2 sont pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- calcul n°1

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud $NO1$) : $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Re_1^2}$ avec
 $Rm_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rm_{21}^2}$ (cumul sur les modes)
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud $NO4$) : $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Re_2^2}$ avec
 $Rm_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rm_{22}^2}$
- réponse globale : $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$ (cumul sur les appuis)

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
$NO1$	4,00000E-02
$NO2$	5,43820E-02
$NO3$	5,75544E-02
$NO4$	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
$NO1$	5,36769E+01
$NO4$	7,44120E+01

4.3 Réponse globale sur base modale incomplète sans correction statique

Seul le mode 1 est pris en compte. Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) de la réponse sont directement cumulées au niveau des appuis.

- calcul n°1

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud *NO1*) : $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Re_1^2}$ avec $Rm_1 = Rm_{11}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud *NO4*) : $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Re_2^2}$ avec $Rm_2 = Rm_{12}$
- réponse globale : $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	4,00000E-02
<i>NO2</i>	5,43794E-02
<i>NO3</i>	5,73536E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	5,36743E+01
<i>NO4</i>	5,68312E+01

4.4 Réponse globale sur base modale incomplète avec correction statique

Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse. La contribution statique du mode 2 négligé est prise en compte.

- calcul n°1

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud *NO1*) : $R_1 = \sqrt{Rm_1^2 + Rc_1^2 + Re_1^2}$ avec $Rm_1 = Rm_{11}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud *NO4*) : $R_2 = \sqrt{Rm_2^2 + Rc_2^2 + Re_2^2}$ avec $Rm_2 = Rm_{12}$
- réponse globale : $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	4,00000E-02	0.001
<i>NO2</i>	0.054389658	0.001
<i>NO3</i>	0.058152653	0.001
<i>NO4</i>	6,00000E-02	0.001

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
NO1	53.6846755	0.001
NO4	111.6190600	0.001

4.5 Partition des composantes primaire et secondaire de la réponse

Les composantes inertielle (primaire) et statique (secondaire) sont traitées séparément.

- calcul n°1
- réponse primaire sur base modale complète (modes 1 et 2)
COMB_MODE='SRSS'

1) réponse de l'appui $j=1$ (nœud NO1) : $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rm_{21}^2}$ (cumul sur modes)

- réponse de l'appui $j=2$ (nœud NO4) : $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rm_{22}^2}$
- réponse primaire : $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12562E-02
NO3	6,60152E-03
NO4	0,00000E+00

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12562E+01
NO4	6,60152E+01

- réponse secondaire
COMB_DEPL_APPUI='QUAD'

1) réponse secondaire : $RII = \sqrt{Re_1^2 + Re_2^2}$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,54306E-02
NO3	5,71746E-02
NO4	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
-------	-----------

NO1	3,43386E+01
NO4	3,43386E+01

- calcul n°2

- réponse primaire sur base modale incomplète sans correction statique
Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud *NO1*) : $RI_1 = Rm_{11}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud *NO4*) : $RI_2 = Rm_{12}$
- réponse primaire : $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	0,00000E+00
NO2	4,12528E-02
NO3	4,52841E-03
NO4	0,00000E+00

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,12528E+01
NO4	4,52841E+01

- réponse secondaire
COMB_DEPL_APPUI='LINE'

- réponse secondaire : $RII = Re_1 + Re_2$
 - déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	-4,00000E-02
<i>NO2</i>	7,61905E-03
<i>NO3</i>	5,52381E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	-4,76190E+01
<i>NO4</i>	4,76190E+01

- calcul n°3

- réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique
Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud *NO1*) : $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rc_1^2}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud *NO4*) : $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rc_2^2}$
- réponse primaire : $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$

déplacements relatifs : DEPL

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	0,00000E+00	-
<i>NO2</i>	4,1266282E-02	0.001
<i>NO3</i>	1.0620582E-02	0.001
<i>NO4</i>	0,00000E+00	-

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence	Tolérance
<i>NO1</i>	4,12662823E+001	0.001
<i>NO4</i>	1.0620581996E+02	0.001

- réponse secondaire
COMB_DEPL_APPUI='ABS'
- réponse secondaire : $RII = |Re_1| + |Re_2|$

déplacements d'entraînement : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	4,00000E-02
<i>NO2</i>	4,95238E-02
<i>NO3</i>	5,90476E-02
<i>NO4</i>	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

- calcul n°4
- réponse primaire sur base modale incomplète avec correction statique

Seul le mode 1 intervient dans le calcul de la réponse.

COMB_MODE='SRSS'

- réponse de l'appui $j=1$ (nœud NO1) : $RI_1 = \sqrt{Rm_{11}^2 + Rc_1^2}$
- réponse de l'appui $j=2$ (nœud NO4) : $RI_2 = \sqrt{Rm_{12}^2 + Rc_2^2}$
- réponse primaire : $RI = \sqrt{RI_1^2 + RI_2^2}$
- réponse secondaire : test cumul de DDSs
 - 5 cas de charge sont définis. Les 5 réponses statiques élémentaires associées sont :
 - cas a : $DDSa_{NO1} = -0.04$ soit $R_a = r_1 \times DDSa_{NO1}$
 - cas b : $DD Sb_{NO4} = 0.06$ soit $R_b = r_2 \times DD Sb_{NO4}$
 - cas c : $DD Sc_{NO4} = 0.03$ soit $R_c = r_2 \times DD Sc_{NO4}$
 - cas d : $DD Sd_{NO1} = -0.07$ soit $R_d = r_1 \times DD Sd_{NO1}$
 - cas e : $DD Se_{NO4} = 0.05$ soit $R_e = r_2 \times DD Se_{NO4}$

4 combinaisons sont calculées :

- combinaison n°1

cumul linéaire des cas a et b : TYPE_COMBI='LINE' NUME_ORDRE=200

réponse secondaire : $RII_1 = Ra + Rb$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	7,61905E-03
NO3	5,52381E-02
NO4	6,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	-4,76190E+01
NO4	4,76190E+01

- combinaison n°2

cumul absolu des cas a et c : TYPE_COMBI='ABS' NUME_ORDRE=201

réponse secondaire : $RII_2 = |Ra| + |Rc|$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	4,00000E-02
NO2	3,52381E-02
NO3	3,04762E-02
NO4	3,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	3,33333E+01
NO4	3,33333E+01

- **combinaison n°3**

cumul quadratique des cas d et e : TYPE_COMBI='QUAD' NUME_ORDRE=202

réponse secondaire : $RII_3 = \sqrt{Rd^2 + Re^2}$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	7,00000E-02
NO2	4,37189E-02
NO3	4,77356E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
NO1	4,09635E+01
NO4	4,09635E+01

- **combinaison n°4**

cumul linéaire des cas a et e : TYPE_COMBI='LINE' NUME_ORDRE=203

réponse secondaire : $RII_4 = Ra + Re$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
NO1	-4,00000E-02
NO2	2,85714E-03
NO3	4,57143E-02
NO4	5,00000E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	-4,28571E+01
<i>NO4</i>	4,28571E+01

La réponse secondaire totale est établie par le cumul quadratique des 4 combinaisons précédentes :

$$RII = \sqrt{RII_1^2 + RII_2^2 + RII_3^2 + RII_4^2} \quad \text{NUME_ORDRE}=204$$

déplacements absolus : DEPL

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	9,84886E-02
<i>NO2</i>	5,67386E-02
<i>NO3</i>	9,13703E-02
<i>NO4</i>	9,74679E-02

réactions nodales : REAC_NODA

NOEUD	Référence
<i>NO1</i>	8,30266E+01
<i>NO4</i>	8,30266E+01

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus avec *Code_Aster* sont conformes aux résultats analytiques de référence.