SDLL141 - Fréquences propres d’une poutre seule, soumise à l’effet gyroscopique.

Résumé :

Ce problème consiste à chercher les fréquences de vibration d'une poutre appuyée à chacune de ses extrémités, sur des appuis infiniment rigides. La poutre est pleine, de section circulaire et soumise à une vitesse de rotation constante. Elle ne comporte aucun disque.

Cinq modélisations sont étudiées :

- Modélisation A : la poutre est suivant l’axe x ,
- Modélisation B : la poutre est suivant l’axe t tel que t vecteur directeur de la bissectrice (x, y) .
- Modélisation C : la poutre est suivant l’axe t tel que t vecteur directeur de la bissectrice , et la (x, y) masse est distribuée par des éléments discrets installés sur chacun des nœuds.
- Modélisation D : la poutre est suivant l’axe x . La section est circulaire et variable avec les deux rayons $R1$ et $R2$ identiques.
- Modélisation E : reprend la modélisation C avec déclaration des caractéristiques des éléments discrets dans le repère local.

Ce problème permet donc de tester l'effet de la matrice gyroscopique qui a été développé pour une poutre droite.

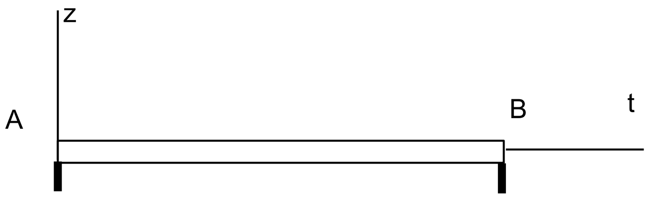
L’effet gyroscopique conduit au dédoublement des modes. L’évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation permet de construire le diagramme de Campbell.

Les références sont basées sur la théorie d’Euler-Bernouilli.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux donnés en référence.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Modélisations A et D :

$$t=x$$

Modélisations B, C et E :

$\frac{\pi}{4}=(\hat{x},t)$ et $t.z=0$

Longueur de la poutre :

$$L=AB=0.9\,m$$

Section circulaire :

Diamètre : $D=0.05\,m$

Coordonnées des points (m) :

		Modélisations A et D	Modélisations B et C
	A	B	B
X	0.	0.9	$0.9\cos(\pi/4)$
Y	0.	0.	$0.9\sin(\pi/4)$
Z	0.	0.	0.

Tableau 1.1-1 : Coordonnées des points A et B

1.2 Propriétés de matériaux

$E=2.10^{11}\,Pa$
$\rho=7\,800\,kg/m^3$ sauf pour les modélisations C et E.

Pour les modélisations C et E, la masse volumique du matériau est prise égal à zéro. La masse est installée par l'intermédiaire d'éléments discrets installés sur chacun des nœuds.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Point A : appuyé $u=v=w=\theta_x=0$
Point B : appuyé $u=v=w=\theta_x=0$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle présentée dans l'ouvrage de René-Jean GIBERT.
En adoptant les notations suivantes :

- poutre suivant x
- y et z les mouvements de flexion dans les plan xOz et xOy
- S : section de la poutre
- I : moment d'inertie de flexion par rapport aux axes y et z
- I_x : moment d'inertie par unité de longueur par rapport à l'axe Ox
- ρ , E les caractéristiques du matériau
- Ω vitesse de rotation de la poutre

Les solution singulières sont régies par le système d'équations suivant :

$$EI\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}-\rho S\omega^2 Y+i\omega\Omega I_x\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$
$$EI\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}-\rho S\omega^2 Z-i\omega\Omega I_x\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0$$

en respectant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} Y=Z=0 \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0 \end{cases} \text{en } \begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases}$$

On obtient deux familles de modes propres :

- Mode rétrograde :

$$Y_1=-i.Z_1=\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)=\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda$$

- Mode direct :

$$Y_2=-i.Z_2=\sin\frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)=\sqrt{\lambda^2+1}+\lambda$$

en posant :

pulsation propre sans rotation : $\omega_0=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

$$\lambda=\frac{1}{2}.\frac{\Omega I_x}{\sqrt{EI\rho S}} \text{ avec } I_x=\frac{\rho S D^2}{8} \text{ et } I=\frac{\pi D^4}{64}$$

2.2 Résultats de référence

4 premiers modes propres de flexion.

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique avec l'hypothèse de poutre d'Euler.

2.4 Références bibliographiques

René-Jean GIBERT, Vibrations des structures, n°69 de la collection R&D d'EDF chez EYROLLES, p. 235-237 (1988).

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : 18 Éléments équirépartis de poutre POU_D_E

3.2 Caractéristiques du maillage

L'axe de la poutre est orienté selon le vecteur x .

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 SEG2

Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	122,7475	0,1 %
Mode 2	'ANALYTIQUE'	490,9899	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	1104,7273	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	1963,9596	0,1 %

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 2	'ANALYTIQUE'	125,8150	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	503,2598	0,1 %
Mode 6	'ANALYTIQUE'	1132,3346	0,1 %
Mode 9	'ANALYTIQUE'	2013,0393	0,1 %

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	119,7548	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	479,0191	0,1 %
Mode 5	'ANALYTIQUE'	1077,7931	0,1 %
Mode 7	'ANALYTIQUE'	1916,0765	0,1 %

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : 18 Éléments équirépartis de poutre POU_D_E

4.2 Caractéristiques du maillage

L'axe de la poutre est orienté selon le vecteur $(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0)$.

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 SEG2

Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	122,7475	0,1 %
Mode 2	'ANALYTIQUE'	490,9899	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	1104,7273	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	1963,9596	0,1 %

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen
Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 2	'ANALYTIQUE'	125,8150	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	503,2598	0,1 %
Mode 6	'ANALYTIQUE'	1132,3346	0,1 %
Mode 9	'ANALYTIQUE'	2013,0393	0,1 %

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	119,7548	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	479,0191	0,1 %
Mode 5	'ANALYTIQUE'	1077,7931	0,1 %
Mode 7	'ANALYTIQUE'	1916,0765	0,1 %

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation :

- 18 Éléments équirépartis de poutre `POU_D_E`
- 19 Éléments discrets `DIS_TR`

5.2 Caractéristiques du maillage

L'axe de la poutre est orienté selon le vecteur $(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0)$.

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 `SEG2`, 19 `POI1`

Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

5.3 Masse des éléments discrets

Dans cette modélisation, la masse de la poutre n'est pas prise en compte sur les éléments de poutre mais sur les éléments discrets. On fait le calcul des caractéristiques de masse à affecter à chaque élément afin d'être équivalent au cas où la masse est affectée sur les éléments de poutre.

Longueur d'un élément : $e=\frac{L}{18}=0.05\,m$

Caractéristiques des éléments discrets dans la base (t, v, z)

Nœuds $N2$ à $N18$	Nœuds $N1$ et $N19$
$m=\rho\, e\pi\frac{D^2}{4}=0.7657\,kg$	$m'=\rho\frac{e}{2}\pi\frac{D^2}{4}=0.3829\,kg$
$I_{tt}=m.\frac{D^2}{8}=2,393.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{tt}=m'.\frac{D^2}{8}=1,196.10^{-4}\ kg.m^2$
$I_{vv}=I_{zz}=\frac{I_{tt}}{2}+m.\frac{e^2}{12}=2,791.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{vv}=I'_{zz}=\frac{I'_{tt}}{2}+m'.\frac{e^2}{3}=1,395.10^{-4}\ kg.m^2$

Tableau 5.3-1 : Calcul des caractéristiques des éléments discrets

Deux solutions sont possibles pour définir les caractéristiques dans la base :
- soit effectuer un changement de base du repère local de la poutre (t, v, z) au repère global (x, y, z) . Pour cela, il faut effectuer un changement de base par une rotation d'axe z et de valeur $-45°$. On obtient :

$$\bar{\bar{I}}=\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$ avec :

$$I_{xx}=\cos^2(\pi/4)I_{tt}+\sin^2(\pi/4)I_{vv}$$
$$I_{yy}=\sin^2(\pi/4)I_{tt}+\cos^2(\pi/4)I_{vv}$$
$$I_{xy}=\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)(I_{tt}-I_{vv})$$

Caractéristiques des éléments discrets dans la base (x, y, z)

Nœuds $N2$ à $N18$	Nœuds $N1$ et $N19$
$m=\rho.e.\pi.\frac{D^2}{4}=0,7657\ kg$	$m'=\rho.\frac{e}{2}.\pi.\frac{D^2}{4}=0,3829\ kg$
$I_{xx}=I_{yy}=\frac{1}{2}\left(m.\frac{D^2}{8}+\frac{1}{2}m.\frac{D^2}{8}+m.\frac{e^2}{12}\right)$ $=2,592.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{xx}=I'_{yy}=\frac{1}{2}\left(m'.\frac{D^2}{8}+\frac{1}{2}m'.\frac{D^2}{8}+m'.\frac{e^2}{12}\right)$ $=1,296.10^{-4}\ kg.m^2$
$I_{zz}=\frac{I_{tt}}{2}+m.\frac{e^2}{12}=2,792.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{zz}=\frac{I'_{tt}}{2}+m'.\frac{e^2}{12}=1,396.10^{-4}\ kg.m^2$
$I_{xy}=I_{yx}=\frac{1}{2}\left\{m.\frac{D^2}{8}-\left(\frac{1}{2}m.\frac{D^2}{8}+m.\frac{e^2}{12}\right)\right\}$ $=-1,994.10^{-5}\ kg.m^2$	$I'_{xy}=I'_{yx}=\frac{1}{2}\left\{m'.\frac{D^2}{8}-\left(\frac{1}{2}m'.\frac{D^2}{8}+m'.\frac{e^2}{12}\right)\right\}$ $=-9,971.10^{-6}\ kg.m^2$

Tableau 5.3-2 : Calcul des caractéristiques des éléments discrets

– soit déclarer les caractéristiques dans le repère local de la poutre et utiliser les angles nautiques pour définir l'orientation du repère local. Cette méthode est utilisée pour la modélisation E.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	122,7475	0,1 %
Mode 2	'ANALYTIQUE'	490,9899	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	1104,7273	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	1963,9596	0,1 %

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen
Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 2	'ANALYTIQUE'	125,8150	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	503,2598	0,1 %
Mode 6	'ANALYTIQUE'	1132,3346	0,1 %
Mode 9	'ANALYTIQUE'	2013,0393	0,1 %

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	119,7548	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	479,0191	0,1 %

Mode 5	'ANALYTIQUE'	1077,7931	0,1 %
Mode 7	'ANALYTIQUE'	1916,0765	0,1 %

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : 18 Éléments équirépartis de poutre `POU_D_E`

Les éléments sont de section circulaire variable avec les deux rayons $R1$ et $R2$ identiques.

6.2 Caractéristiques du maillage

L'axe de la poutre est orienté selon le vecteur x .

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 `SEG2`

Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	122,7475	0,1 %
Mode 2	'ANALYTIQUE'	490,9899	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	1104,7273	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	1963,9596	0,1 %

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 2	'ANALYTIQUE'	125,8150	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	503,2598	0,1 %
Mode 6	'ANALYTIQUE'	1132,3346	0,1 %
Mode 9	'ANALYTIQUE'	2013,0393	0,1 %

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	119,7548	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	479,0191	0,1 %
Mode 5	'ANALYTIQUE'	1077,7931	0,1 %
Mode 7	'ANALYTIQUE'	1916,0765	0,1 %

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation :

- 18 Éléments équirépartis de poutre `POU_D_E`
- 19 Éléments discrets `DIS_TR`

7.2 Caractéristiques du maillage

L'axe de la poutre est orienté selon le vecteur $(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4), 0)$.

Maillage : Nombre de nœuds : 19
Nombre de mailles et types : 18 `SEG2`, 19 `POI1`

Noms des nœuds : Point A = $N1$
Point B = $N19$

7.3 Masse des éléments discrets

Dans cette modélisation, la masse de la poutre n'est pas prise en compte sur les éléments de poutre mais sur les éléments discrets. On fait le calcul des caractéristiques de masse à affecter à chaque élément afin d'être équivalent au cas où la masse est affectée sur les éléments de poutre.

Longueur d'un élément : $e=\frac{L}{18}=0.05\,m$

Caractéristiques des éléments discrets dans la base (t, v, z)

Nœuds $N2$ à $N18$	Nœuds $N1$ et $N19$
$m=\rho e \pi \frac{D^2}{4}=0.7657\,kg$	$m'=\rho \frac{e}{2} \pi \frac{D^2}{4}=0.3829\,kg$
$I_{tt}=m.\frac{D^2}{8}=2,393.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{tt}=m'.\frac{D^2}{8}=1,196.10^{-4}\ kg.m^2$
$I_{vv}=I_{zz}=\frac{I_{tt}}{2}+m.\frac{e^2}{12}=2,791.10^{-4}\ kg.m^2$	$I'_{vv}=I'_{zz}=\frac{I'_{tt}}{2}+m'.\frac{e^2}{3}=1,395.10^{-4}\ kg.m^2$

Tableau 7.3-1 : Calcul des caractéristiques des éléments discrets

Dans cette modélisation contrairement à la modélisation C, on déclare les caractéristiques dans le repère local de la poutre et on utilise les angles nautiques pour définir l'orientation du repère local.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Rotor à l'arrêt ($\Omega=0$) (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	122,7475	0,1 %
Mode 2	'ANALYTIQUE'	490,9899	0,1 %

Mode 3	'ANALYTIQUE'	1104,7273	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	1963,9596	0,1 %

Calcul des fréquences propres à l'aide de l'algorithme de Sorensen
Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes directs (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 2	'ANALYTIQUE'	125,8150	0,1 %
Mode 4	'ANALYTIQUE'	503,2598	0,1 %
Mode 6	'ANALYTIQUE'	1132,3346	0,1 %
Mode 9	'ANALYTIQUE'	2013,0393	0,1 %

Rotor en rotation ($\Omega=10^4 rd.s^{-1}$) , modes rétrogrades (fréquences en Hz)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Mode 1	'ANALYTIQUE'	119,7548	0,1 %
Mode 3	'ANALYTIQUE'	479,0191	0,1 %
Mode 5	'ANALYTIQUE'	1077,7931	0,1 %
Mode 7	'ANALYTIQUE'	1916,0765	0,1 %

8 Synthèse des résultats

Bonne implantation de l'effet gyroscopique pour l'élément de poutre. Le changement d'axe de la poutre x (direction selon laquelle les éléments ont été implantés) (modélisation A) à une direction $x+y$ (modélisation B) n'engendre pas d'écarts de résultats.

En absence de référence analytique pour la validation des éléments discrets soumis à l'effet gyroscopique, les modélisations C et E permettent tout de même de vérifier l'implantation de la matrice gyroscopique d'un disque supposé indéformable. Le mouvement de chacun des disques est fixé par celui des nœuds et suit donc la déformée de la fibre neutre uniquement de manière discrète. Ceci explique les écarts constatés sur la modélisation C, d'autant plus pour les modes élevés caractérisés par une concavité de la déformée modale plus importante.