

---

## SHLL101 - Poutre droite. Analyse harmonique

---

### Résumé :

Ce problème bidimensionnel consiste à calculer les efforts présents dans une poutre soumise à une traction ou à une flexion lors d'une analyse harmonique. La solution de référence est obtenue à partir des équations discrétisées.

Ce test comporte deux modélisations.

Pour la première modélisation, quatre sollicitations sont testées :

- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement,
- force de flexion,
- force de flexion et matériau présentant un amortissement.

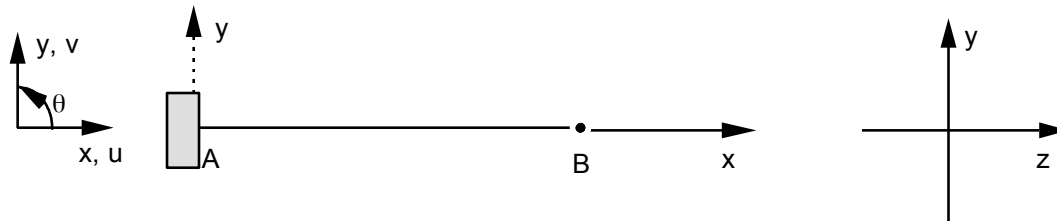
Pour la deuxième modélisation, deux sollicitations sont testées :

- force de traction,
- force de traction et matériau présentant un amortissement.

La deuxième modélisation permet de tester les chargements complexes imposés par la commande `AFFE_CHAR_MECA_C`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Les caractéristiques géométriques de la poutre constituant le modèle mécanique sont les suivantes :

Longueur :  $L = 10 \text{ m}$

Section transversale	Aire	$IZ = IY$	$JX$
	$3.439 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$	$1.377 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$	$2.754 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$

Les coordonnées (en mètres) des points caractéristiques de la poutre sont :

	A	B
$x$	0.	10.
$y$	0.	0.

### 1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés du matériau constituant la poutre sont :

$$E = 1.658 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\rho = 1.3404106 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\alpha = \text{AMOR\_ALPHA} = 0.001$$

$$\beta = \text{AMOR\_BETA} = 0.$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

La condition aux limites qui caractérise ce problème est l'encastrement du point  $A$  et s'écrit :

$$u = v = 0.$$

$$\theta = 0.$$

Pour le chargement on a :

$F_x = 3000. \text{ N}$	$F_y = 3000. \text{ N}$	$F_y = F_z = 0.$	(effort de traction)
$F_x = 0.$		$F_z = 0.$	(effort de flexion)

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Si la poutre est modélisée par une poutre d'Euler-Bernoulli et par un seul élément fini, le problème harmonique peut s'écrire de la façon suivante :

**problème en traction :**

$$(1+i\alpha\omega)\frac{ES}{L}u(B)-\omega^2\frac{\rho SL}{6}u(B)=F_x(B)$$

$$\text{d'où } u(B)=\frac{F(B)}{\frac{ES}{L}-\omega^2\frac{\rho SL}{6}+i\alpha\omega\frac{ES}{L}}$$

**problème en flexion :**

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} + (1+i\alpha\omega)\frac{12EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-L}{2} \\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(B) \\ \theta(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y(B) \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Remarque :**

|Si le matériau ne présente pas d'amortissement, on a alors : AMOR\_ALPHA =  $\alpha=0$  .

Les efforts au point  $B$  se calculent de la manière suivante :

**problème en traction :**

$$N(B)=\left(\frac{ES}{L}-\omega^2\frac{\rho SL}{6}\right)u(B)$$

**problème en flexion :**

$$\begin{bmatrix} VY(B) \\ MFZ(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} + \frac{12EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-L}{2} \\ \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(B) \\ \theta(B) \end{bmatrix}$$

On résout analytiquement les systèmes  $2 \times 2$  pour obtenir la solution.

### 2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les efforts généralisés obtenus au point  $B$  lors de l'analyse harmonique.

## 2.3 Remarque pour la modélisation B

Pour la modélisation B, on veut tester dans le cas du problème en traction le mot-clé `FORCE_POUTRE` qui permet d'appliquer des efforts répartis. Pour obtenir la même solution que la poutre soumise à force nodale en son extrémité, la relation entre l'effort réparti constant et la force nodale est :

$$F_x(B) = \frac{fL}{2}$$

Avec les valeurs données au paragraphe 1.3, on a :  $f = 600 \text{ N/m}$

## 2.4 Incertitude sur la solution

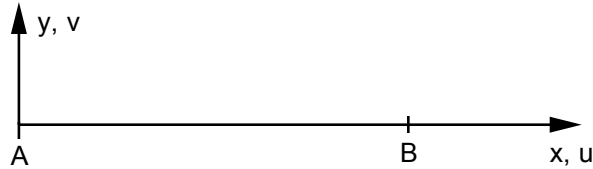
Si les hypothèses sont vérifiées (poutre d'Euler-Bernoulli), la solution est analytique.

## 2.5 Références bibliographiques

- 1) [R3.08.01] Éléments de poutres "exacts" (droits et courbes).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU\_D\_E).

L'extrémité  $A$  est encastée :

$$DX = DY = DZ = 0. \quad DRX = DRY = DRZ = 0.$$

Les vitesses et accélérations sont obtenues de façon suivantes en harmonique :

$$v(B) = i\omega u(B)$$

$$a(B) = -\omega^2 u(B)$$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

## 3.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

### Problème 1 : traction

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.318 10 <sup>-5</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-2.099 10 <sup>-1</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 2 : flexion

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DY	(1.828 10 <sup>-2</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(1.82 10 <sup>-2</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DY	(0., 1.1489)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(0., 1.1438)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DY	(-72.19, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(-71.86, 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	VY	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 3 : traction + amortissement

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.296 10 <sup>-5</sup> , -3.363 10 <sup>-6</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(2.113 10 <sup>-4</sup> , 3.327 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-2.091 10 <sup>-1</sup> , 1.327 10 <sup>-2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(2.9879 10 <sup>3</sup> , -1.897 10 <sup>2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 4 : flexion + amortissement

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DY	(1.746 10 <sup>-2</sup> , -4.469 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(1.7579 10 <sup>-2</sup> , -3.402 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DY	(2.808 10 <sup>-1</sup> , 1.097)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(2.138 10 <sup>-1</sup> , 1.1045)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DY	(-68.95, 17.64)	'ANALYTIQUE'	0,05
		DRZ	(-69.4, 13.43)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	VY	(3.0215 10 <sup>3</sup> , 1.212 10 <sup>2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
		MFZ	(-1.567 10 <sup>2</sup> , -8.583 10 <sup>2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05

## 4 Modélisation B

---

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



La poutre est constituée d'une seule maille.

La modélisation utilisée pour la poutre est celle d'Euler-Bernoulli (POU\_D\_E).

L'extrémité  $A$  est encastée :

$$DX = DY = DZ = 0. \quad DRX = DRY = DRZ = 0.$$

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de mailles et types : 1 maille de type SEG 2

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

## 4.3 Grandeurs testées (forme réel-imaginaire)

### Problème 1 : traction (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.318 10 <sup>-5</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(0., 3.341 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-2.099 10 <sup>-1</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(3000., 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 2 : traction (effort réparti complexe : partie réelle nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(0., 5.318 10 <sup>-5</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(-3.341 10 <sup>-3</sup> , 0.)	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(0., -2.099 10 <sup>-1</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(0., 3000.)	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 3 : traction + amortissement (effort réparti réel : partie imaginaire nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(5.296 10 <sup>-5</sup> , -3.363 10 <sup>-6</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(2.113 10 <sup>-4</sup> , 3.327 10 <sup>-3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-2.091 10 <sup>-1</sup> , 1.327 10 <sup>-2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(2.9879 10 <sup>3</sup> , -1.897 10 <sup>2</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05

### Problème 4 : flexion + amortissement (effort réparti complexe : partie réelle nulle)

Point/Grandeur			Valeur de référence	Type de référence	Précision (%)
déplacement	B	DX	(3.363 10 <sup>-3</sup> , 5.296 10 <sup>-5</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
vitesse	B	DX	(-3.327 10 <sup>-3</sup> , 2.113 10 <sup>-4</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
accélération	B	DX	(-1.327 10 <sup>-2</sup> , -2.091 10 <sup>-1</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05
effort généralisé	B	N	(1.897 10 <sup>2</sup> , 2.9879 10 <sup>3</sup> )	'ANALYTIQUE'	0,05

Quand l'effort réparti est appliqué en tant que partie imaginaire du chargement, la solution de référence est obtenue à partir de celle de la modélisation A en échangeant partie réelle et partie imaginaire et en changeant le signe des nouvelles parties réelles.



## 5 Synthèse des résultats

---

On retrouve bien les résultats analytiques.