

## SHLV301 – Réponse harmonique par sous-structuration : poutre bi-appuyée

---

### Résumé :

La structure étudiée est une poutre bi-appuyée soumise à une charge répartie variant de manière harmonique au cours du temps.

Cette poutre est déformable à l'effort tranchant. Elle est modélisée par des éléments de volume hexaédriques à 20 nœuds (modélisation 3D).

La réponse harmonique est calculée par la méthode de sous-structuration dynamique de Mac-Neal.

Les résultats sont comparés à des valeurs obtenues analytiquement pour un modèle de poutre de Timoshenko déformable à l'effort tranchant et tenant compte de l'inertie rotatoire des sections.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

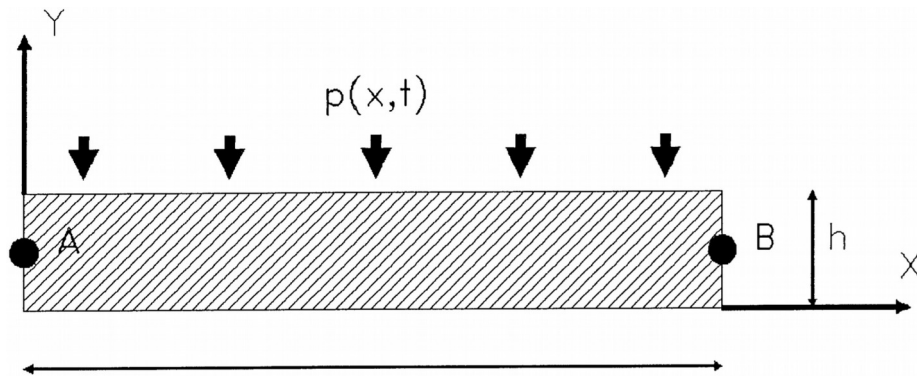


Figure 1.1-1 : Géométrie du problème

Hauteur :  $h=0.2$  m

Largeur :  $b=0.1$  m

Longueur :  $L=2$  m

Section :  $A=b \times h=0.02$  m

Inertie :  $I = \frac{b \times h^3}{12} = 1.66 \times 10^{-5}$  m

Coefficient de réduction de section  $k' = \frac{5}{6}$

### 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young	$E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 7800.0$ kg.m <sup>-3</sup>
Module de cisaillement	$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.076 \times 10^{10}$ Pa
Coefficients de l'amortissement de Rayleigh	$\alpha = 1.6 \times 10^{-5}$ s et $\beta = 16$ s <sup>-1</sup>

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

On autorise que la flexion dans le plan  $XY$  et l'extension le long de l'axe  $X$ . Le modèle étant volumique, les conditions aux limites diffèrent quelque peu de celles que l'on imposerait à un modèle poutre.

Déplacement imposé :

En $X=0$ , $Y=h/2$	$DX=0$ , $DY=0$
En $X=L$ , $Y=h/2$	$DX=0$ , $DY=0$

En $Z = b/2$	$DZ = 0$
--------------	----------

Aux conditions précédentes, on ajoute la contrainte de planéité des sections en  $X=0$  et  $X=L$ . Cette contrainte peut s'exprimer comme suit. Désignons par  $x^T = (X, Y, Z)$  le vecteur des coordonnées et par  $u^T = (DX, DY, DZ)$  le vecteur des déplacements; la position d'un point est repérée par le vecteur  $x'^T = x^T + u^T = (X', Y', Z')$ . Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non-alignés de la section. Un point quelconque  $P$  est astreint à la condition :

$$\begin{vmatrix} X'_P & Y'_P & Z'_P & 1 \\ X'_A & Y'_A & Z'_A & 1 \\ X'_B & Y'_B & Z'_B & 1 \\ X'_C & Y'_C & Z'_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Force imposée :

En  $Y = h$ , pour tout  $X$ , la mise en charge est définie par :

$$p(x, t) = p(x) \sin(\omega t)$$

avec  $p(x) = p_0 = 5.0 \times 10^4 \text{ N.m}^{-1}$  et  $\omega = 2000\pi \text{ rd.s}^{-1}$ .

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est obtenue analytiquement pour une poutre de Timoshenko, prenant en compte la déformation à l'effort tranchant et l'inertie rotatoire des sections.

La solution est développée en série des modes propres. Les aspects théoriques sont développés dans la référence donnée en 2.4.

#### 2.1.1 Base modale

Définissons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$\lambda_n = k_n L$  longueurs d'onde

$\Omega_n = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_n^2$  valeurs propres

$j = \frac{I}{AL^2}$  inertie rotatoire

$g = \frac{EI}{k' A G L^2}$  coefficient de cisaillement

Chaque mode propre de nombre d'ondes  $k_n$  est caractérisé par les grandeurs suivantes :  
Les fréquences propres :

$$\Omega_{1,2} = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_{1,2}^2 = \frac{(g+j)\lambda_n^2 + 1 \pm \sqrt{(g-j)^2 \lambda_n^4 + 2(g+j)\lambda_n^2 + 1}}{2g j}$$

avec

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(les indices 1 et 2 correspondent aux signes + et – devant la racine).

Les masses généralisées :

$$\mu_{1,2} = \rho A \left( k_n - \frac{\omega_{1,2}^2 \rho}{k_n k' G} \right)^2 \rho I.$$

Les pourcentages d'amortissement critique :

$$\epsilon_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_{1,2} + \frac{\beta}{\omega_{1,2}} \right)$$

#### 2.1.2 Réponse harmonique

L'amplitude et la phase de la flèche  $W$  sont données par

$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \left[ \sum_{m=1}^2 \frac{1}{\mu_m (\omega_m^2 - \omega^2 + 2i \epsilon_m \omega_m \omega)} \right] \sin(k_n x)$$

avec

$$p_n = \frac{2 p_0}{n \pi} [1 - (-1)^n]$$

## 2.2 Résultats de référence

Position	Flèche $W$	
	Amplitude ( $m$ )	Phase
$x = \frac{L}{4}$	$2.136 \times 10^{-5}$	$22.4^\circ$
$x = \frac{L}{2}$	$1.342 \times 10^{-5}$	$-121.5^\circ$
$x = 3 \frac{L}{4}$	$2.136 \times 10^{-5}$	$22.4^\circ$

Les grandeurs effectivement testées dans le cas-test sont les parties réelles et imaginaires dont on donne les valeurs ci-dessous.

Position	Flèche $W$	
	Partie réelle ( $m$ )	Partie imaginaire ( $m$ )
$x = \frac{L}{4}$	$-1.9599467159360556 \times 10^{-5}$	$-8.4917893914738073 \times 10^{-6}$
$x = \frac{L}{2}$	$-6.9993870268574731 \times 10^{-6}$	$-1.1450108350939712 \times 10^{-5}$
$x = 3 \frac{L}{4}$	$-1.9599467159360556 \times 10^{-5}$	$-8.4917893914738073 \times 10^{-6}$

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 2.4 Références bibliographiques

ROBERT G., Solutions analytiques en dynamiques des structures, Rapport Samtech n° 121, Liège, 1996.

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

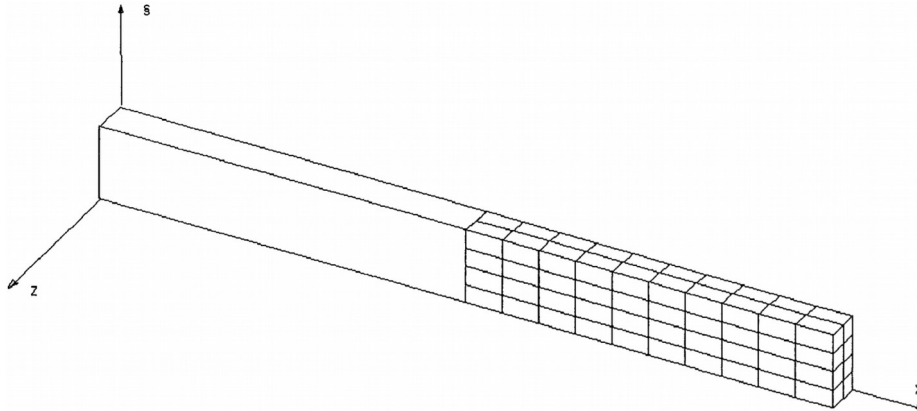


Figure 3.1 Maillage de la géométrie du problème.

La poutre est divisée en deux parties égales. Chaque moitié est représentée par une sous-structure. Celles-ci sont générées par la méthode de Mac-Neal.

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 557

Nombre de mailles et types : 80 HEXA20, 20 QUAD8

#### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Lieu	Type de grandeur	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
$X = \frac{L}{4}$ (première moitié)	DY	$1.95994 \times 10^{-5} + 8.49179 \times 10^{-6} j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X = \frac{L}{2}$ (première moitié)	DY	$-6.999387 \times 10^{-6} - 1.14501 \times 10^{-5} j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X = \frac{L}{2}$ (seconde moitié)	DY	$-6.999387 \times 10^{-6} - 1.14501 \times 10^{-5} j$	'ANALYTIQUE'	5.0
$X = 3\frac{L}{4}$ (seconde moitié)	DY	$1.95994 \times 10^{-5} + 8.49179 \times 10^{-6} j$	'ANALYTIQUE'	5.0

## 4 Synthèse des résultats

---

Ce test permet de valider la sous-structuration dynamique avec interface de type Mac-Neal. La solution est comparée à une solution analytique. Les résultats obtenus sont en bon accord.