

---

## SSL14 - Portique plan articulé en pied

---

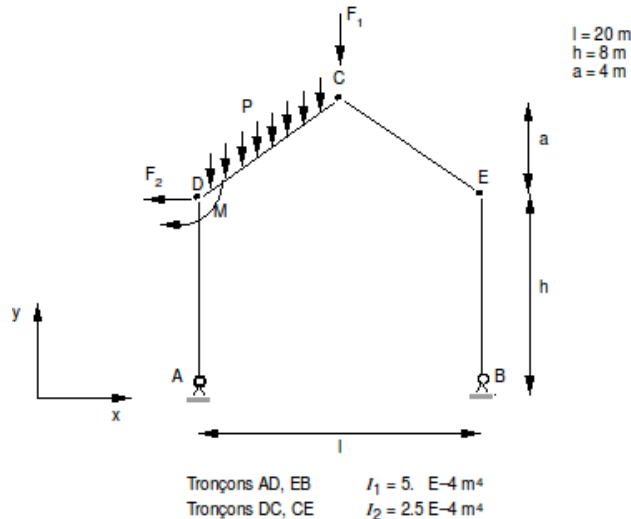
### Résumé

Ce test concerne l'étude d'un portique composé de poutres élancées, articulé en pied, en analyse statique linéaire.

Le portique est modélisé avec des éléments linéiques `SEG2` et soumis à quatre chargements (répartis ou ponctuels).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Géométrie du portique ( $m$ ) :

- $l = 20$
- $h = 8$
- $a = 4$

Moments quadratiques des poutres ( $m^4$ ) :

- Tronçons AD, EB :  $I_1 = 5.0 E^{-4}$
- Tronçons DC, CE :  $I_2 = 2.5 E^{-4}$

Le portique est constitué de poutres de sections symétriques, de telle sorte que  $IY = IZ$ .

On ne tient compte que de l'énergie de flexion, car les poutres sont très élancées. C'est pourquoi les autres caractéristiques de section de poutre n'interviennent pas.

### 1.2 Propriétés de matériaux

Matériau élastique linéaire isotrope :  $E = 2.1 E11 Pa$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Pieds de poteaux A et B articulés.

#### Chargements

Force nodale en C :	$F_y = -2000 \text{ N} = F_1$
Force nodale en D :	$F_x = -10000 \text{ N} = F_2$
Moment en D :	$M_x = -100000 \text{ N.m} = M$
Force répartie sur le tronçon DC :	$P_z = -3000 \text{ N/m}$

## 2 Solution de référence

---

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La méthode de calcul et la solution ont été déterminées par F. Voltaire (EDF R&D / AMA) et sont exposées dans l'annexe.

### 2.2 Résultats de référence

Réactions horizontales  $F_x$  et verticales  $F_y$  au point  $A$ .

Moment de flexion  $M_z$  en  $C$ .

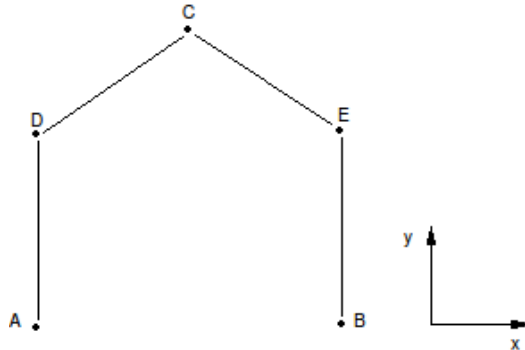
Déplacements horizontal  $D_x$  et vertical  $D_y$  du point  $C$ .

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



- Modélisation `POU_D_E`
- 10 éléments par tronçons, soit 40 éléments `SEG2`
- Déplacement dans le plan :  $DZ=0$  sur tout le maillage
- Pieds de poteaux  $A$  et  $B$  articulés :  $DX = DY = 0$

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

#### 3.2.1 Valeurs testées

Chargement	Nœud	Valeur testée	Référence
$p$	$C$	$Dx (m)$	0.0110476
		$Dy (m)$	-0.012422374
		$Mz (N.m)$	18672.994
	$A$	$Fx (N)$	5175.37
		$Fy (N)$	24233.24
$F_1$	$C$	$Dx (m)$	0.00000
		$Dy (m)$	-0.01497330
		$Mz (N.m)$	41422.161
	$A$	$Fx (N)$	4881.487
		$Fy (N)$	10000.00
$F_2$	$C$	$Dx (m)$	-0.03000956
		$Dy (m)$	-0.00299466
		$Mz (N.m)$	8284.432
	$A$	$Fx (N)$	5976.297
		$Fy (N)$	4000.00
$C$	$C$	$Dx (m)$	0.0273532
		$Dy (m)$	-0.001215646
		$Mz (N.m)$	4916.724
	$A$	$Fx (N)$	4576.394
		$Fy (N)$	5000.00

## 4 Synthèse des résultats

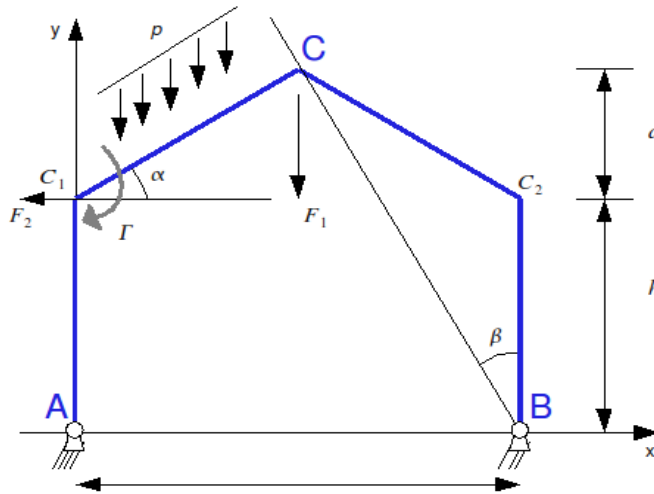
---

Les résultats obtenus avec la modélisation `POU_D_E` sont en très bon accord avec la solution analytique et valident donc le calcul de treillis de poutres soumis à des efforts ponctuels ou répartis.

## 5 Annexe

### 5.1 Présentation

On considère le portique ci-contre, soumis à diverses charges.



On considère le portique ci-contre, soumis à diverses charges.

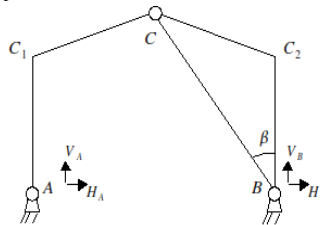
Hyperstaticité de degré 1.  
Inconnue hyperstatique : X :  
moment en C.

Chargement vertical réparti  $p$  sur  $C_1C_2$ .

Deux forces  $F_1$ ,  $F_2$  et un couple en  $C_1$ .

Hyperstaticité de degré 1.  
Inconnue hyperstatique : X  
Charges appliquées :

- moment en C,
- chargement vertical réparti  $p$  sur  $C_1C_2$ ,
- force  $F_1$ ,  $F_2$  appliquées en  $C_1$ ,
- couple  $\Gamma$  appliqué en  $C_1$



$$\tan(\alpha) = \frac{2a}{l} = 0.4 \Rightarrow (\cos(\alpha))^{-1} = \sqrt{1.16} = 1.077033$$

$$\tan(\beta) = \frac{l}{2(a+h)} = \frac{1}{1.2}$$

$$b = \frac{l}{2\cos(\alpha)} ; \quad \sin(\alpha) = \frac{a}{b}$$

### 5.2 Sollicitations isostatiques sous charge réelle répartie $p$ sur $C_1C$

#### 5.2.1 Réactions d'appuis isostatiques

$$H_A + H_B = 0 \quad V_A + V_B = \frac{pl}{2\cos(\alpha)} \quad lV_B = \frac{pl^2}{8\cos(\alpha)}$$

La partie  $CB$  est articulée et chargée seulement à ses extrémités

$$\begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge BC = 0 \Leftrightarrow H_B = -V_B \tan(\beta)$$

D'où les réactions isostatiques

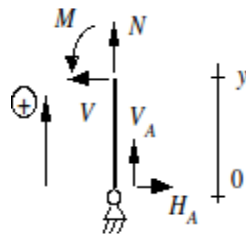
$$H_A = \frac{pl}{8\cos(\alpha)} \tan(\beta) \quad ; \quad V_A = \frac{3pl}{8\cos(\alpha)} \quad ; \quad H_B = \frac{-pl}{8\cos(\alpha)} \tan(\beta) \quad ; \quad V_B = \frac{pl}{8\cos(\alpha)}$$

Remarque :

$$\frac{l \tan(\beta)}{8 \cos(\alpha)} = \frac{bl}{8(a+h)}$$

## 5.2.2 Sollicitations

Poutre  $AC_1$

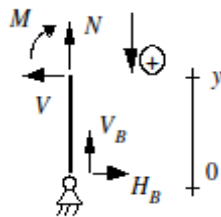


$$N_{iso} = \frac{-3pl}{8\cos(\alpha)}$$

$$V_{iso} = \frac{pl}{8\cos(\alpha)} \tan(\beta)$$

$$M_{iso} = \frac{-pl}{8\cos(\alpha)} y \cdot \tan(\beta)$$

Poutre  $C_2B$

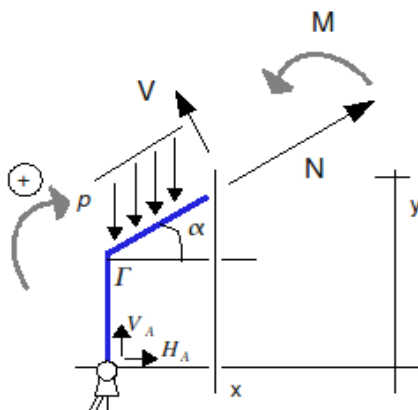


$$N_{iso} = \frac{-pl}{8\cos(\alpha)}$$

$$V_{iso} = \frac{-pl}{8\cos(\alpha)} \tan(\beta)$$

$$M_{iso} = \frac{-pl}{8\cos(\alpha)} y \cdot \tan(\beta)$$

Poutre  $C_1C$



$$N_{iso} = -H_A \cos(\alpha) - V_A \sin(\alpha) + \frac{px}{\cos(\alpha)} \sin(\alpha)$$

$$= -\frac{pl}{8} \left( \tan(\beta) + 3 \tan(\alpha) - 8 \tan(\alpha) \frac{x}{l} \right)$$

$$V_{iso} = H_A \sin(\alpha) - V_A \cos(\alpha) + \frac{px}{\cos(\alpha)} \cos(\alpha)$$

$$= \frac{pl}{8} \left( \tan(\beta) \tan(\alpha) - 3 + 8 \frac{x}{l} \right)$$

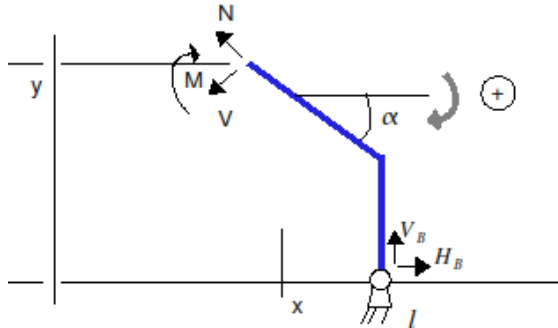
$$M_{iso} = -\frac{px^2}{2\cos(\alpha)} + V_A x - H_A y$$

$$= \frac{p}{\cos(\alpha)} \left( \frac{-x^2}{2} + \frac{3lx}{8} - \frac{ly \tan(\beta)}{8} \right)$$

avec  $M_{iso} = 0$  en C

$$M_{iso} = \frac{-pl}{8(a+h)} \left( 2s^2 \left( \frac{a+h}{b} \right) - s(2a+3h) + bh \right) \quad \text{avec } s = \frac{x}{\cos(\alpha)} \in [0, b]$$

## Poutre $CC_2$

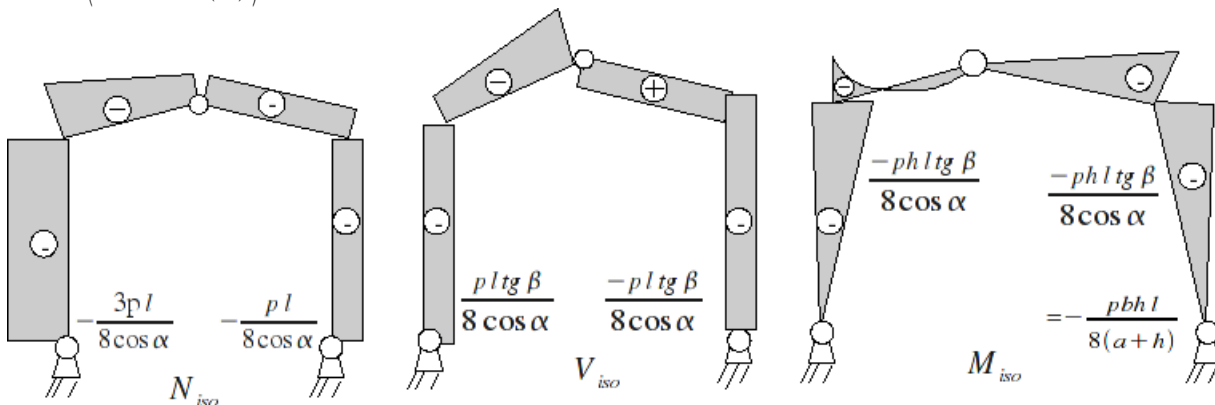


$$\begin{aligned}
 N_{iso} &= H_B \cos(\alpha) - V_B \sin(\alpha) \\
 &= -\frac{pl}{8} (\tan(\beta) + \tan(\alpha)) \\
 V_{iso} &= H_B \sin(\alpha) + V_B \cos(\alpha) \\
 &= -\frac{pl}{8} (\tan(\beta) \tan(\alpha) - 1) \\
 M_{iso} &= H_B y - V_B (l-x) \\
 &= -\frac{pl}{8 \cos(\alpha)} (y \tan(\beta) - (l-x))
 \end{aligned}$$

avec  $M_{iso} = 0$  en C

### 5.2.3 Diagrammes

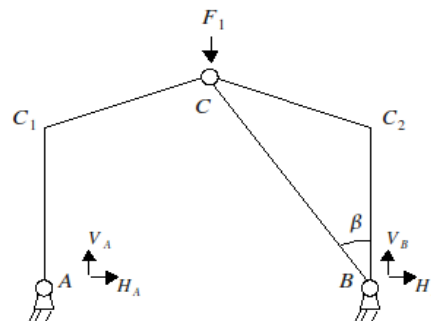
$$b = \frac{l}{2 \cos(\alpha)}$$



## 5.3 Sollicitations sous force concentrée $F_1$ (vers le bas)

### 5.3.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned}
 H_A + H_B &= 0; \\
 V_A + V_B &= F_1; \\
 \left( \begin{matrix} H_A \\ V_A \end{matrix} \right) \wedge AC &= 0 = \left( \begin{matrix} H_B \\ V_B \end{matrix} \right) \wedge BC;
 \end{aligned}$$



D'où :

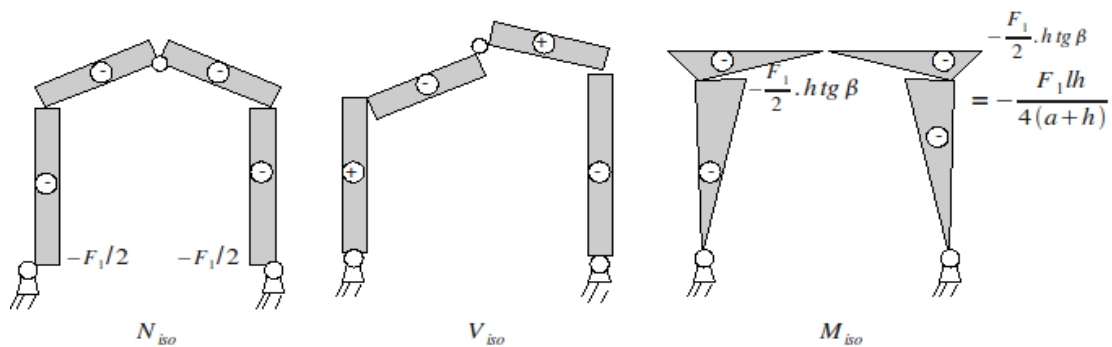
$$H_A = \frac{1}{2} F_1 \tan(\beta); V_A = \frac{1}{2} F_1; H_B = -\frac{1}{2} F_1 \tan(\beta); V_B = \frac{1}{2} F_1$$



## 5.3.2 Sollicitations

<b>Poutre <math>AC_1</math> :</b>	$N_{iso} = \frac{-1}{2} F_1$ $V_{iso} = \frac{1}{2} F_1 \tan(\beta)$ $M_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 y \tan(\beta)$
<b>Poutre <math>C_2B</math> :</b>	$N_{iso} = \frac{-1}{2} F_1$ $V_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 \tan(\beta)$ $M_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 y \tan(\beta)$
<b>Poutre <math>C_1C</math> :</b>	$N_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 (\tan(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ $V_{iso} = \frac{1}{2} F_1 (\tan(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$ $M_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 (y \tan(\beta) - x)$
<b>Poutre <math>CC_2</math> :</b>	$N_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 (\tan(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ $V_{iso} = \frac{1}{2} F_1 (\tan(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$ $M_{iso} = \frac{-1}{2} F_1 (y \tan(\beta) - (l - x))$

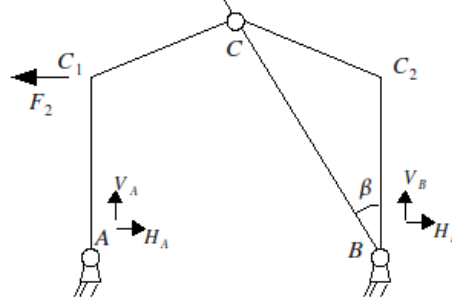
## 5.3.3 Diagrammes ( $F_1$ vers le bas)



## 5.4 Sollicitations sous la force concentrée $F_2$ (vers la gauche)

### 5.4.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= F_2; \\ V_A + V_B &= 0; \\ lV_B + hF_2 &= 0; \\ \left( \begin{matrix} H_B \\ V_B \end{matrix} \right) \text{ans } BC &= 0 \end{aligned}$$



D'où :

$$H_A = F_2 \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right); V_A = F_2 \frac{h}{l}; H_B = F_2 \frac{h}{l} \tan(\beta); V_B = -F_2 \frac{h}{l};$$

Remarque :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{h}{l} \tan(\beta) &= \frac{h}{2(a+h)} & \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right) &= \frac{2a+h}{2(a+h)} \\ \tan(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) &= \frac{-hl}{2b(a+h)}, & \tan(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) &= \frac{l^2 - 4(a^2 + ah)}{4b(a+h)} \end{aligned} \right.$$

### 5.4.2 Sollicitations

$$N_{iso} = -F_2 \frac{h}{l}$$

Poutre  $AC_1$  :

$$V_{iso} = F_2 \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right)$$

$$M_{iso} = -F_2 y \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right)$$

$$N_{iso} = F_2 \frac{h}{l}$$

Poutre  $C_2B$  :

$$V_{iso} = F_2 \frac{h}{l} \tan(\beta)$$

$$M_{iso} = -F_2 y \frac{h}{l} \tan(\beta)$$

$$N_{iso} = F_2 \left( \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right) \cos(\alpha) - \frac{h}{l} \cos(\alpha) \right)$$

Poutre  $C_1C$  :

$$V_{iso} = F_2 \left( \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right) - \frac{h}{l} \cos(\alpha) \right)$$

$$M_{iso} = F_2 \left( \frac{h}{l} x - \left(1 - \frac{h}{l} \tan(\beta)\right) y \right)$$

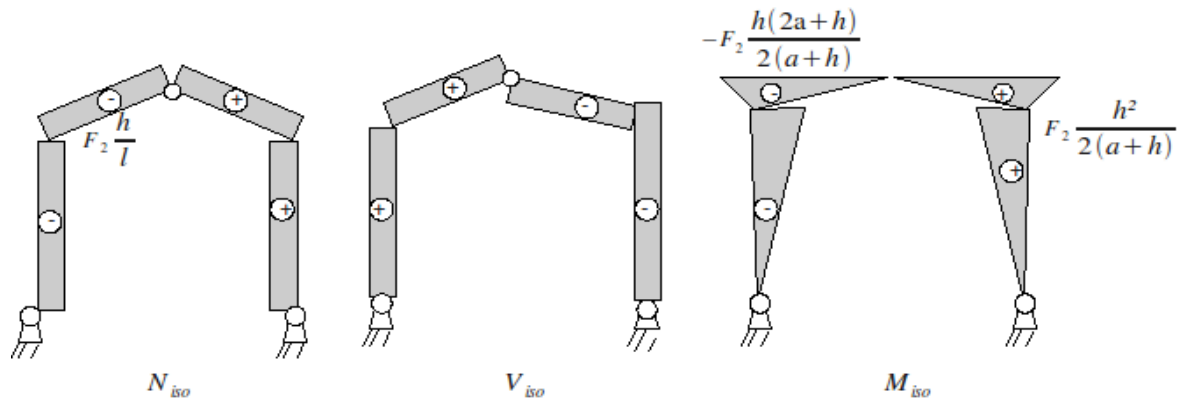
$$N_{iso} = F_2 \frac{h}{l} (\tan(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$$

Poutre  $CC_2$  :

$$V_{iso} = F_2 \frac{h}{l} (\tan(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

$$M_{iso} = F_2 \frac{h}{l} (y \tan(\beta) - (l - x))$$

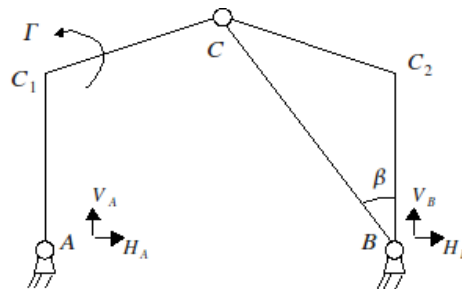
## 5.4.3 Diagrammes



## 5.5 Sollicitations sous le couple concentré $\Gamma$ (positif)

### 5.5.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= 0; \\ V_A + V_B &= 0; \\ lV_B + \Gamma &= 0; \\ \begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge BC &= 0; \end{aligned}$$



$$\text{D'où : } H_A = -\Gamma \tan \frac{\beta}{l}, \quad V_A = \frac{\Gamma}{l}, \quad H_B = \Gamma \tan \frac{\beta}{l}, \quad V_B = -\frac{\Gamma}{l}$$

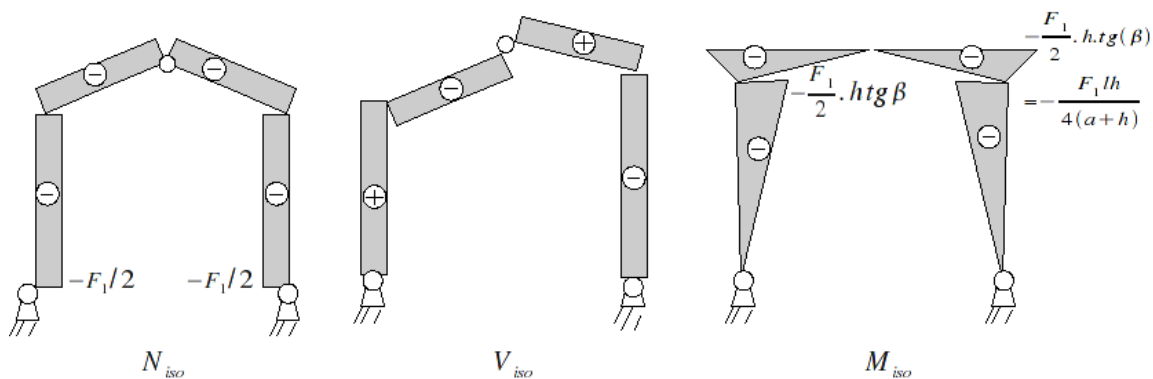
Remarque :

$$\left| \frac{\tan(\beta)}{l} = \frac{1}{2(a+h)} \right.$$

## 5.5.2 Sollicitations

<b>Poutre</b> $AC_1$ :	$N_{iso} = \frac{-\Gamma}{l}$ $V_{iso} = \frac{-\Gamma \tan(\beta)}{l}$ $M_{iso} = \frac{\Gamma y \tan(\beta)}{l}$
<b>Poutre</b> $C_2B$ :	$N_{iso} = \frac{-\Gamma}{l}$ $V_{iso} = \frac{\Gamma \tan(\beta)}{l}$ $M_{iso} = \frac{\Gamma y \tan(\beta)}{l}$
<b>Poutre</b> $C_1C$ :	$N_{iso} = \frac{\Gamma}{l} (\tan(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha))$ $N_{iso} = \frac{-\Gamma}{l} (\tan(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\alpha))$ $N_{iso} = \frac{\Gamma}{l} (x + y \tan(\beta) - l)$
<b>Poutre</b> $CC_2$ :	$N_{iso} = \frac{\Gamma}{l} (\tan(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\alpha))$ $N_{iso} = \frac{\Gamma}{l} (\tan(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha))$ $N_{iso} = \frac{\Gamma}{l} (y \tan(\beta) - (l - x))$

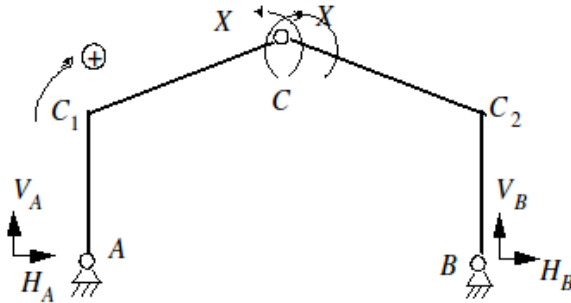
## 5.5.3 Diagrammes ( $\Gamma$ positif)



## 5.6 Sollicitations sous le moment $X$ hyperstatique

### 5.6.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= 0; \\ V_A + V_B &= 0; \\ IV_B &= 0; \\ H_B(a+h) - X &= 0; \end{aligned}$$

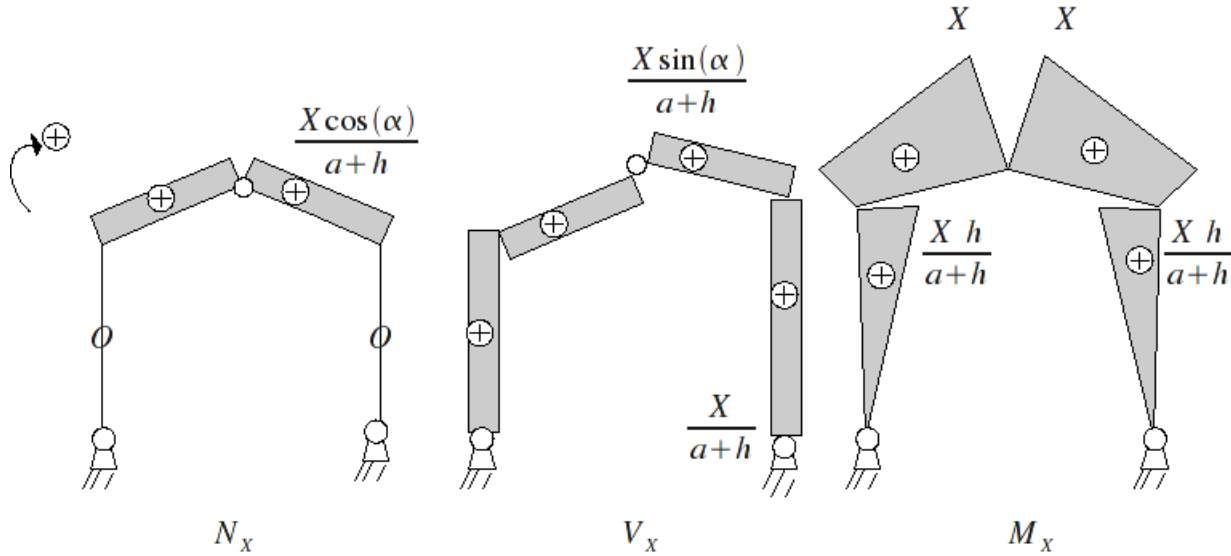


D'où les réactions :  $H_A = \frac{-X}{a+h}$ ,  $V_A = 0$ ,  $H_B = \frac{X}{a+h}$ ,  $V_B = 0$

### 5.6.2 Sollicitations

<b>Poutre <math>AC_1</math> :</b>	$N_x = 0$ $V_x = \frac{-X}{a+h}$ $M_x = \frac{X}{a+h} y$
<b>Poutre <math>C_2B</math> :</b>	$N_x = 0$ $V_x = \frac{X}{a+h}$ $M_x = \frac{X}{a+h} y$
<b>Poutre <math>C_1C</math> :</b>	$N_x = \frac{X}{a+h} \cos(\alpha)$ $V_x = \frac{X}{a+h} \sin(\alpha)$ $M_x = \frac{X}{a+h} y = \frac{X}{a+h} (h + x \tan(\alpha))$
<b>Poutre <math>CC_2</math> :</b>	$N_x = \frac{X}{a+h} \cos(\alpha)$ $V_x = \frac{X}{a+h} \sin(\alpha)$ $M_x = \frac{X}{a+h} y$

## 5.6.3 Diagrammes

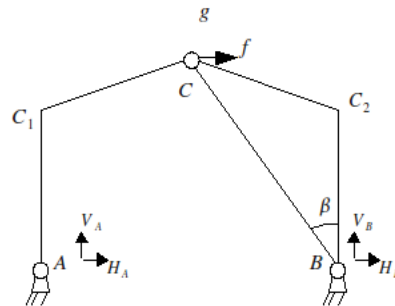


## 5.7 Sollicitations sous charges fictives ponctuelles en C

Afin de calculer les déplacement en C, à l'aide du Principe des travaux Virtuels (cf. le paragraphe [§ 8]), il est nécessaire d'établir les diagrammes de sollicitations sous l'action de deux forces "fictives"  $f$  et  $g$  appliquées en C.

### 5.7.1 Réactions d'appui

$$\begin{aligned} H_A + H_B &= -f; \\ V_A + V_B &= -g; \\ \begin{pmatrix} H_A \\ V_A \end{pmatrix} \wedge AC &= 0 = \begin{pmatrix} H_B \\ V_B \end{pmatrix} \wedge BC \end{aligned}$$



D'où :

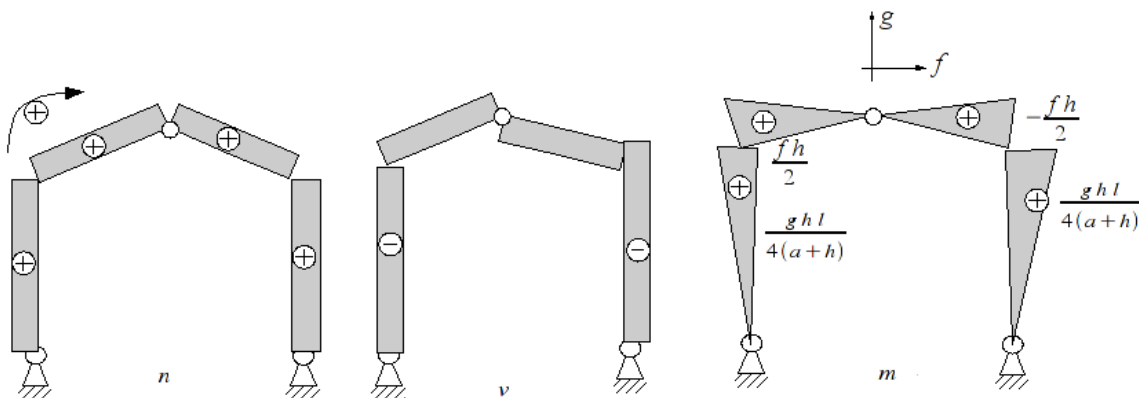
$$\begin{aligned} H_A &= \frac{-1}{2}(f + g \tan(\beta)), & V_A &= \frac{-1}{2}(g + f \cot(\beta)) \\ H_B &= \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta)), & V_B &= \frac{-1}{2}(g - f \cot(\beta)) \end{aligned}$$

## 5.7.2 Sollicitations

	$n = \frac{1}{2}(g + f \cot(\beta))$
<b>Poutre <math>AC_1</math> :</b>	$v = \frac{-1}{2}(f + g \tan(\beta))$
	$m = \frac{1}{2}(f + g \tan(\beta))$
<hr/>	
	$n = \frac{1}{2}(g - f \cot(\beta))$
<b>Poutre <math>C_2B</math> :</b>	$v = \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta))$
	$m = \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta))y$
<hr/>	
	$n = \frac{1}{2}(f + g \tan(\beta)) \cos(\alpha) + \frac{1}{2}(g + f \cot(\beta)) \sin(\alpha)$
<b>Poutre <math>C_1C</math> :</b>	$v = \frac{-1}{2}(f + g \tan(\beta)) \sin(\alpha) + \frac{1}{2}(g + f \cot(\beta)) \cos(\alpha)$
	$m = \frac{1}{2}(f + g \tan(\beta))y - \frac{1}{2}(g + f \cot(\beta))x$
<hr/>	
	$n = \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta)) \cos(\alpha) + \frac{1}{2}(g - f \cot(\beta)) \sin(\alpha)$
<b>Poutre <math>CC_2</math> :</b>	$v = \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta)) \sin(\alpha) - \frac{1}{2}(g - f \cot(\beta)) \cos(\alpha)$
	$m = \frac{-1}{2}(f - g \tan(\beta))y - \frac{1}{2}(g - f \cot(\beta))(l - x)$

## 5.7.3 Diagrammes

Voici les diagrammes de sollicitations sous l'action des deux forces "fictives"  $f$  et  $g$ . On considère ici :  $f \geq 0, g \geq f \cot(\beta)$ .



## 5.8 Détermination du moment $X$ hyperstatique

On se place en élasticité ; on ne considère que l'énergie de flexion, les poutres étant élancées. L'état naturel est supposé vierge (pas de précontraintes ni de déplacement d'appui).

Le potentiel complémentaire est alors :

$$F^*(X) = \int_{\text{poteaux}} \frac{(M_{iso} + M_1 X)^2}{EI_1} + \int_{\text{charpentes}} \frac{(M_{iso} + M_1 X)^2}{EI_2}$$

Il est stationnaire à l'équilibre, d'où :

$$\delta \cdot X = \left[ \int_{pot} \frac{M_1^2}{EI_1} + \int_{charp} \frac{M_1^2}{EI_2} \right] \cdot X = - \int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} - \int_{charp} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = S$$

Le coefficient de souplesse  $\delta$  est la somme de :

$$\int_{pot} \frac{M_1^2}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right)^2$$

$$\int_{charp} \frac{M_1^2}{EI_2} = \frac{2b}{EI_2} \left[ \left( \frac{h}{a+h} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{a+h} \right)^2 + \frac{ah}{(a+h)^2} \right]$$

soit :

$$E \cdot \delta = \frac{2}{(a+h)^2} \left[ \frac{h^3}{3I_1} + \frac{b(3h^2 + a^2 + 3ah)}{3I_2} \right]$$

### Application numérique :

Dans l'exemple considéré :

$$I_1 = 2I_2 = 5.0 E - 4 m^4, \quad h = 2a = 8 m, \quad l = 20 m, \quad b = \frac{l}{2} \sqrt{1.16}$$

$$D'où : \gamma = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{h^2}{3} \left( h + \frac{19b}{2} \right)$$

2353.45347 m<sup>3</sup>

On étudie l'un après l'autre les divers chargements pour calculer les seconds membres  $S$ .

## 5.8.1 Charge répartie $p$ sur $C_1C$

Le second membre  $S$  dû à  $f$  est :

$$- \int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{3h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right) \left( \frac{pblh}{8(a+h)} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{ph^3 bl}{24}$$

$$- \int_{CC_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{pb^2 hl}{8(a+h)EI_2} \left( \frac{1}{2} \frac{h}{a+h} \right) + \left( \frac{a}{6} \frac{a}{a+h} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{phb^{21}(3h+a)}{48}$$

$$- \int_{C_1C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{1}{EI_2} \frac{pl}{8(a+h)^2} \int_0^b \left[ 2s^2 \frac{a+h}{b} - s(2a+3h) + bh \right] \left[ h + s \frac{a}{b} \right] ds$$

$$= \frac{1}{E(a+h)^2 I_2} \frac{plb^2}{48} (h^2 + 2ah + a^2)$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{plb}{96} \left[ \frac{4h^3}{I_1} + \frac{hb(3h+a)}{I_2} + \frac{b(h^2 - 2ah - a^2)}{I_2} \right]$$

### Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad p = 3000 N.m^{-1} \quad (\text{vers le bas})$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{plbh^2}{96} \left[ 4h + \frac{13}{2} b \right]$$

43946021.89 N.m<sup>4</sup>



D'où :

- le moment en  $C$  :  
 $X = 18672994 \text{ N.m}$
- la réaction en  $A$  :

$$H_A = p \frac{bl}{8(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{pbl}{8-X} \frac{1}{a+h}, \quad H_A = 5175.37 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{3pb}{4} - 0, \quad V_A = 24233.24 \text{ N}$$

## 5.8.2 Charge ponctuelle $F_1$ en $C$

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right) \left( \frac{F_1 lh}{4(a+h)} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{F_1 lh^3}{12}$$

$$-\int_{charp} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{2b}{EI_2} \frac{F_1 lh}{4(a+h)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{F_1 blh(3h+a)}{24}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{F_1 lh}{24} \left[ \frac{2h^2}{I_1} + \frac{b(3h+a)}{I_2} \right]$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 ; \quad h = 2a ; \quad F_1 = 20000 \text{ N} \quad (\text{vers le bas})$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{F_1 lh^2}{24} [2h + 7b]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{97485127.76 \text{ N.m}^4}$

D'où :

- le moment en  $C$  :  
 $X = 41422.161 \text{ N.m}$
- la réaction en  $A$  :

$$H_A = \frac{1}{4} F_1 \frac{l}{a+h} - \frac{X}{a+h} = \frac{F_1 l}{4-X} \frac{1}{a+h}, \quad H_A = 4881.4866 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{1}{2} F_1 - 0, \quad V_A = 10000.0 \text{ N}$$

## 5.8.3 Charge ponctuelle $F_2$ en $C_1$

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{AC_1} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right) \frac{F_2 h(2a+h)}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{F_2 h^3(2a+h)}{12}$$

$$-\int_{C_2B} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right) \frac{(-F_2 h^2)}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{F_2 h^3(2a+h)}{12}$$

$$-\int_{C_1C} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{EI_2} \frac{F_2 h (2a+h)}{2(a+h)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{F_2 b h (3h^2 + 7ah + 2a^2)}{24}$$

$$-\int_{CC_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{EI_2} \frac{-F_2 h^2}{2(a+h)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-F_2 b h^2 (3h+a)}{24}$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{F_2 h a}{12} \left[ \frac{2h^2}{I_1} + \frac{b(3h+a)}{I_2} \right]$$

### Application numérique :

$$I_1 = 2 I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad F_2 = 10\,000 \text{ N} \quad (\text{vers la gauche})$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{F_2 h^2 a}{12} [2h + 7b]$$

19 497 025.55 N.m<sup>4</sup>

D'où :

- le moment en C :  
 $X = 8\,284.4321 \text{ N.m}$
- la réaction en A :

$$H_A = F_2 \frac{2a+h}{2(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{F_2(a + \frac{h}{2}) - X}{a+h}, \quad H_A = 5976.297 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{F_2 h}{l}, \quad V_A = 4000.0 \text{ N}$$

## 5.8.4 Couple ponctuel $\Gamma$ en $C_1$

Le second membre s'obtient à l'aide de :

$$-\int_{pot} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_1} = \frac{-2h}{3EI_1} \left( \frac{h}{a+h} \right) \frac{\Gamma h}{2(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-\Gamma h^3}{6}$$

$$-\int_{C_1C} \frac{b}{EI_2} = \frac{\Gamma(h+2a)}{2(a+h)} \frac{b}{EI_2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{\Gamma(h+2a)(3h+a)b}{24}$$

$$-\int_{CC_2} \frac{M_1 M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{EI_2} \frac{-\Gamma h}{2(a+h)} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right] = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-\Gamma h b (3h+a)}{24}$$

D'où :

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{-\Gamma}{12} \left[ \frac{2h^3}{I_1} + \frac{ab(3h+a)}{I_2} \right]$$

### Application numérique :

$$I_1 = 2 I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad \Gamma = -100\,000 \text{ N.m} \quad (\text{sens aiguilles de montre})$$

$$S = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-\Gamma}{6} [h^3 - ab(3h+a)]$$

11 571 281.93 N.m<sup>4</sup>

D'où :

- le moment en C :  
 $X = 4916.7243 \text{ N.m}$

- la réaction en  $A$  :

$$H_A = \frac{-\Gamma}{2(a+h)} - \frac{X}{a+h} = \frac{-\Gamma}{2} - X, \quad H_A = 4576.394 \text{ N}$$

$$V_A = \frac{\Gamma}{l}, \quad V_A = 5000.0 \text{ N}$$

## 5.8.5 Récapitulatif

CAS	Moment en $C$ ( $N.m$ )	Réactions en $A$ ( $N$ )	
		$H_A$	$V_A$
$p$ sur $C_1C$	18672.994	5175.37	24233.240
$F_1$ en $C$	41422.161	4881.487	10000.000
$F_2$ en $C_1$	8284.432	5976.297	4000.000
$\Gamma$ en $C_1$	4916.724	4576.394	5000.000
TOTAL	73296.311	22033.31	43233.24

### Remarque

Rappel : dans le poteau  $AC_1$  : effort normal =  $-V_A$ , effort tranchant =  $H_A$ .

## 5.9 Calcul du déplacement en $C$

On ne considère aussi que l'énergie élastique de flexion (poutres élancées). En appliquant le Principe des Travaux virtuels sur la structure soumise aux forces fictives du paragraphe [§ 6], travaillant dans les déplacements cherchés, on calcule les nombres  $w$  et  $d$  dépendant linéairement de  $f$  et  $g$  :

$$f u_c + g v_c = \int_{pot} \frac{m(M_{iso} + XM_1)}{EI_1} + \int_{charp} \frac{m(M_{iso} + XM_1)}{EI_2} = w + Xd, \quad \forall (f, g)$$

### 5.9.1 Charge répartie $p$ sur $C_1C$

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \frac{ghl}{4(a+h)} - \frac{pbhl}{8(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} - \frac{gpbh^3 l^2}{96}$$

$$\int_{C_1C} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} - \frac{plhb^2}{384} (2f(a+h) + gl)(h-a)$$

$$\int_{CC_2} \frac{M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{3EI_2} \frac{pbhl}{8(a+h)} \left( \frac{fh}{2} - \frac{glh}{4(a+h)} \right) = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} - \frac{pb^2 lh^2 (gl - 2f(a+h))}{192}$$

D'où :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} - \frac{pbhl}{384} \left( \frac{4glh^2}{I_1} + \frac{glb(3h+a) - efb(a+h)^2}{I_2} \right)$$

### Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad p = 3000 \text{ N.m}^{-1} \quad (\text{vers le bas})$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \left( gl \left( 2h + \frac{5}{2}b \right) - \frac{9}{2}fbh \right) - \frac{pbh^2 l}{192}$$

-215 406.5922 N.m<sup>3</sup>

## 5.9.2 Charge ponctuelle $F_1$ en $C$

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \frac{ghl}{4(a+h)} \frac{-F_1 hl}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_1 gh^3 l^2}{48}$$

$$\int_{charp} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{2b}{3EI_2} \frac{ghl}{4(a+h)} \frac{-F_1 hl}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-F_1 gbh^2 l^2}{48}$$

D'où (on constate que  $w$  ne dépend pas de  $f$  pour ce chargement):

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{-F_1 gh^2 l^2}{48} \left( \frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2} \right)$$

**Application numérique :**

$$I_1 = 2I_2, \quad h = 2a, \quad F_1 = 20\,000 \text{ N (vers le bas)}$$

$$w = \frac{2g}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_1 h^2 l^2}{48} (h+2b)$$

-3155100365.0 N.m<sup>2</sup>

## 5.9.3 Charge ponctuelle $F_2$ en $C_1$

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3EI_1} \frac{F_2 h}{2(a+h)} \left[ -(2a+h) \left( \frac{fh}{2} + \frac{ghl}{4(a+h)} \right) + h \left( \frac{-fh}{2} + \frac{ghl}{4(a+h)} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{-F_2 h^3}{24} (agl + 2f(a+h)^2)$$

$$\int_{charp} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{-F_2 bh^2}{24} (agl + 2f(a+h)^2)$$

D'où :

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{-F_2 h^2}{24} (agl + 2f(a+h)^2) \left( \frac{h}{I_1} + \frac{b}{I_2} \right)$$

**Application numérique :**

$$I_1 = 2I_2, \quad h = 2a, \quad F_2 = 10\,000 \text{ N (vers la gauche)}$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} (gl + 9gh) \frac{-F_2 h^3 (h+2b)}{48}$$

-3151003.65 N.m<sup>4</sup>

## 5.9.4 Couple ponctuel $\Gamma$ en $C_1$

$$\int_{pot} \frac{m M_{iso}}{EI_1} = \frac{h}{3EI_1} \frac{\Gamma h}{2(a+h)} \left[ \left( \frac{fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)} \right) + \left( \frac{-fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{\Gamma h^3 lg}{24}$$

$$\int_{\text{charp}} \frac{m M_{iso}}{EI_2} = \frac{b}{3EI_2} \frac{\Gamma h}{2(a+h)} \left[ -(2a+h) \left( \frac{fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)} \right) + h \left( \frac{-fh}{2} + \frac{glh}{4(a+h)} \right) \right]$$

$$= \frac{-2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{\Gamma bh}{24} (agl + 2f(a+h)^2)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2 \quad ; \quad h = 2a \quad ; \quad \Gamma = -100\,000 \text{ N.m}$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{\Gamma h^2}{24} (gl(h-b) - 9fhb)$$

$-3151003.65 \text{ N.m}^4$

5.9.5 Calcul de  $d = \int \frac{m \cdot M_1}{EI}$

$$\int_{\text{pot}} \frac{m M_1}{EI_1} = \frac{2h}{3EI_1} \frac{glh}{4(a+h)} \frac{h}{a+h} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} \frac{glh^3}{12}$$

$$\int_{\text{charp}} \frac{m M_1}{EI_2} = \frac{2b}{EI_2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a+h} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{a}{a+h} \right) \right] \frac{glh}{4(a+h)} = \frac{2}{E(a+h)^2 I_2} \frac{glbh(3h+a)}{24}$$

D'où (on constate que  $d$  ne dépend pas de  $f$ ) :

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2} \frac{glh}{24} \left( \frac{2h^2}{I_1} + \frac{b(3h+a)}{I_2} \right)$$

Application numérique :

$$I_1 = 2I_2, \quad h = 2a$$

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} g \frac{lh^2}{24} \underbrace{(2h+7b)}_{-4874.2564 \text{ N.m}^4}$$

5.9.6 Récapitulatif des déplacements  $u_c$  et  $v_c$

$$I_1 = 5.0 \text{ E} - 4 \text{ m}^4$$

$$E = 210\,000 \text{ MPA}$$

CAS	$X$	$X \bar{d}$	$w_v$
pression sur $C_1 C$	18672.994	91016960.3	-184930109.4
$F_1$ en $C$	41422.161	201902233.4	-315100365.0
$F_2$ en $C_1$	8284.432	40380445.6	-63020073.0
$\Gamma$ en $C_1$	4916.724	23965373.4	14775091.25

CAS	$w_h$	$u_c(m)$	$v_c(m)$
pression sur $C_1 C$	83519999.94	0.0110476	-0.012422374
$F_1$ en $C$	0.00	0.00	-0.01497330
$F_2$ en $C_1$	-226872262.8	-0.03000956	-0.00299466
$\Gamma$ en $C_1$	206790328.5	0.0273532	-0.001215646

**Note :**

$$d = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} g \bar{d}, \text{ avec : } \bar{d} = 4874.2564 m^4$$

$$w = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} (g w_v + f w_h) \text{ voir plus haut}$$

$$u_c = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} w_H ; \quad v_c = \frac{2}{E(a+h)^2 I_1} (w_v + X \bar{d})$$

$$\frac{2}{E(a+h)^2 I_1} = 1.32275132 E-10 N^{-1} m^{-4}$$

**Comparaison Aster - référence analytique (R.)**

CAS		Moment en $C(N.m)$	Réaction $H_A(N)$	Réaction $V_A(N)$	Déplacement $u_c(m)$	Déplacement $v_c(m)$
$P$ sur $C_1 C$	R :	18672.994	5175.37	24233.24	0.0110476	-0.012422374
	Aster :	18673.20	5175.36	24233.2	0.0110472	-0.0124233
$F_1$ en $C$	R :	41422.161	4881.487	10000.00	0.00000	-0.01497330
	Aster :	41422.40	4881.47	10000.0	0.0000	-0.0
$F_2$ en $C_1$	R :	8284.432	5976.297	4000.00	-0.03000956	-0.00299466
	Aster :	8284.34	5976.31	4000.0	-0.0300098	-0.00299450
$\Gamma$ en $C_1$	R :	4916.724	4576.394	5000.00	0.0273532	-0.001215646
	Aster :	4916.62	4576.38	5000.0	0.0273536	-0.00121583

**Nota :**

Le calcul Aster a été réalisé en prenant des éléments très élancés, de telle sorte que :  $Sl^2 \ll I$ . Ainsi, l'énergie de flexion est prédominante. Les valeurs du calcul Aster sont issues du cas-test VPCS appelé SSSL14, avec les données suivantes :

$$I_1 = 5.0 E-4 m^4 ; \quad I_2 = 2.5 E-4 m^4 ; \quad E = 210\,000 MPa$$

$$h = 2a = 8 m ; \quad l = 20 m ; \quad b = \frac{l}{2} \sqrt{1.16}$$

$p = 3000 N.m$  (vers le bas),

$F_1 = 20\,000 N$  (vers le bas),

$F_2 = 10\,000 N$  (vers la gauche),

$\Gamma = -100\,000 Nm$  (sens aiguille de montre).