

## SSLL102 - Poutre encastrée soumise à des efforts unitaires

---

### Résumé :

Ce test permet une vérification simple des calculs de poutres droites et coque 1D en mécanique des structures statique linéaire. Le modèle est linéique.

Les modélisations A, B, C, D, F, G, I et J permettent de tester les différents types d'éléments de poutres droites dans *Code\_Aster*. Pour chaque modélisation, on calcule simultanément 3 poutres de sections différentes : rectangle, cercle, cornière.

La modélisation A permet de plus de tester le changement de repère : la poutre est orientée suivant la trisectrice au repère global.

La modélisation E teste le chargement réparti sur des arêtes d'éléments volumiques.

La modélisation F correspond à un chargement réparti variant linéairement avec la modélisation `POU_D_E`.

La modélisation G correspond à un chargement réparti variant linéairement avec la modélisation `POU_D_TG`.

La modélisation H permet de tester un chargement réparti variant linéairement avec la modélisation `TUYAU_3M`.

La modélisation I reprend le chargement de la modélisation A pour les `POU_D_EM`.

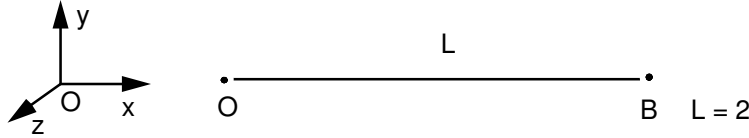
La modélisation J correspond a un chargement réparti variant linéairement avec la modélisation `POU_D_EM`.

Les valeurs testées sont les déplacements, les efforts généralisés et les contraintes.

## 1 Problème de référence

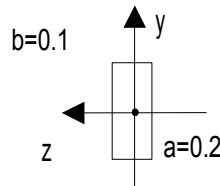
### 1.1 Géométrie

Poutre droite de longueur  $L$ , de direction  $x$ . Les dimensions sont exprimées en mètres, [m].



On calcule simultanément 3 types de sections transversales différentes :

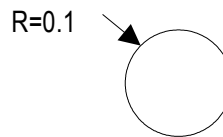
1 section rectangulaire



1 section cornière à ailes égales



1 section circulaire



### 1.2 Propriétés de matériaux

Module d'Young:  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

Coefficient de Poisson:  $\nu = 0.3$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Encastrement en  $O$

6 chargements unitaires en  $B$  :

$$\begin{array}{ll} F_x = 1 & M_x = 1 \\ F_y = 1 & M_y = 1 \\ F_z = 1 & M_z = 1 \end{array}$$

1 chargement combiné flexion plus traction :  $F_x = 1$  ;  $M_y = 1$  ;  $M_z = 1$  ;

1 chargement combiné efforts tranchants plus torsion :  $F_y = 1$   $F_z = 1$   $M_x = 1$

1 chargement réparti linéaire :  $F_y = 1000 \cdot x$  section circulaire (modélisations F, G, I) (avec appui simple en  $A$  et  $B$  dans ce cas)

### 1.4 Notation des caractéristiques de sections transversales

Les caractéristiques géométriques des sections transversales sont notées :

$A$	aire de la section
$I_y, I_z$	moments d'inertie géométriques par rapport aux axes principaux d'inertie de la section
$JX$	constante de torsion
$ay, az$	coefficients de cisaillement dans les directions $G_y$ et $G_z$
$A'_y = \frac{A}{ay}$ et $A'_z = \frac{A}{az}$	aires réduites équivalentes
$e_y, e_z$	excentricité du centre de torsion
$JG$	constante de gauchissement

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Solution analytique [bib1] et [bib2] : déplacements en  $B$

Traction simple	$u_x = \frac{F_x L}{E S}$		
Flexion simple	$u_y = \frac{F_y L^3 (4 + \phi_y)}{12 E I_z}$	$\theta_z = \frac{L^2 F_y}{2 E I_z}$	$\phi_y = \frac{12 E I_y}{L^2 G A'_y}$
Flexion simple	$u_z = \frac{F_z L^3 (4 + \phi_z)}{12 E I_y}$	$\theta_y = \frac{-L^2 F_z}{2 E I_y}$	$\phi_z = \frac{12 E I_z}{L^2 G A'_z}$
Torsion		$\theta_x = \frac{M_x L}{G J_x}$	
Flexion pure	$u_z = -\frac{M_y L^2}{2 E I_y}$	$\theta_y = \frac{M_y L}{E I_y}$	
Flexion pure	$u_y = \frac{M_z L^2}{2 E I_z}$	$\theta_z = \frac{M_z L}{E I_z}$	

#### Remarque 1 :

Pour la section cornière, comme le centre de cisaillement n'est pas confondu avec le centre de gravité ( $e_y \neq 0$ ), il faut ajouter le moment de torsion :  $M_x = F_z e_y$  au chargement  $F_z = 1$ .

Ceci modifie le déplacement :

$$u_z = \frac{F_z L^3 (4 + \phi_z)}{12 E I_y} + \theta_x e_y \quad \theta_x = \frac{M_x L}{G J_x}$$

De la même façon, le chargement  $M_x = 1$  entraîne un déplacement  $u_z = \theta_x e_y$ .

Chargement réparti linéaire :

$$u_y(x) = \frac{p x}{360 L E I} (3x^4 - 10L^2 x^2 + 7L^4) \quad u_y^{max} = \frac{0.00652 p L^4}{E I}$$

en  $x = 0.519 L$

#### Remarque 2 :

En ce qui concerne la modélisation A, la poutre est portée par le vecteur  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Les

autres vecteurs du repère local sont :  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Les composantes du vecteur déplacement dans le repère global sont obtenues par :

$$u_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} u_{local}$$

Efforts généralisés et contraintes en  $O$  :

$$N(O) = F_x \quad \sigma_{xx} = \frac{N}{S}$$

$$M_z(O) = T_y L \quad T_y = F_y \quad \sigma_{xx}(y) = \frac{M_z y}{I_z} \quad \sigma_{xy} = \frac{T_y}{k_y S}$$

$$M_y(O) = -T_z L \quad T_z(O) = F_z \quad \sigma_{xx}(y) = \frac{-M_y z}{I_y} \quad \sigma_{xz} = \frac{T_z}{k_z S}$$

$$M_x(0) = M_x(B) \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \frac{M_x R_T}{J_x}$$

$$M_y(0) = M_y(B) \quad \sigma_{xx}(z) = \frac{M_y z}{I_y}$$

$$M_z(0) = M_z(B) \quad \sigma_{xx}(y) = \frac{M_z y}{I_z}$$

Chargement réparti linéaire :

$$M_z(x) = \frac{-1000}{6} (L^2 x - x^3) \quad V_y(x) = \frac{1000 L^2}{6} - \frac{1000 x^2}{2} \quad \sigma_{xx}^{max} = \frac{M_z^{max} R}{I_z}$$

$$\text{en } x = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

## 2.2 Résultats de référence

Déplacement du point  $B$ ,  
Efforts généralisés au point  $O$ ,  
Contraintes du point  $O$ .

## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 2.4 Références bibliographiques

- 1.J.L. BATOZ, G. DHATT : "Modélisation des structures par éléments finis" - Volume 2 Ed. HERMES.
- 2.N.D. PIKLEY : "Formulas for Stress, Stain & Structural Matrices" Ed. John Wiley & Sons.

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

2 éléments POU\_D\_E  $k_y = k_z = 1$   $\phi = 0$  par type de section

S1 : Section rectangulaire modélisée par SECTION : 'GENERALE'

$$A = 0.02 \quad I_y = 0.1666E-4 \quad I_z = 0.6666E-4 \quad J_x = 0.45776E-4$$

$$R_y = 0.1 \quad R_z = 0.05 \quad R_T = 0.0892632$$

*Point de calcul des contraintes*

S2 : Section cornière

$$A = 1.856E-3 \quad I_y = 4.167339E-4 \quad I_z = 1.045547E-4$$

$$J_x = 0.39595E-8 \quad e_y = 41.012E-3 \quad e_z = 0.0$$

S3 : Section rectangulaire modélisée par SECTION : RECTANGLE

$$H_y = 0.2 \quad H_z = 0.1$$

S4 : Section CERCLE  $R = 0.1$

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi}{4} 10^{-4}$$

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

4×2 éléments POU\_D\_E. La poutre est orientée selon le vecteur (1,1,1).

#### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Cas de charge	Poutre	Identification	Référence
$F_x = 1$	S1=S3	$u_x(B)$	2.887E-10
		$\theta_{xx}(0)$	50.
	S2	$u_x(B)$	3.11E-9
	S4	$u_x(B)$	1.838E-10
		$\sigma_{xx}$	31.83
	$F_y = 1$	S1=S3	$u_y(B)$
$\theta_z(B)$			1.225E-7
$\sigma_{xx}(0)$			3000
S2		$u_y(B)$	9.017E-8
S4		$\sigma_{xx}(0)$	2546.479
$F_z = 1$		S1=S3	$u_z(B)$
	$\theta_y(B)$		-4.243E-7
	$\sigma_{xx}(0)$		6000
	$\sigma_{xz}(0)$		50
	S2		$u_z(B)$
	S4	$\theta_y(B)$	1.553E-5
		$\theta_x(B)$	1.555E-5
		$u_z(B)$	1.386E-7
		$\theta_y(B)$	-9E-8

		$\sigma_{xx}(0)$	2546.479
		$\sigma_{xz}(0)$	31.831
$M_x=1$	$S1=S3$	$\theta_x(B)$	3.279E-7
		$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}(0)$	1950.0
	$S2$	$\theta_x(B)$	3.791E-4
		$u_z(B)$	2.199E-5
	$S4$	$\theta_x(B)$	9.556E-8
		$\sigma_{xy}=\sigma_{xz}(0)$	636.62
$M_y=1$	$S1=S3$	$u_z(B)$	-4.899E-7
		$\theta_y(B)$	4.243E-7
		$\sigma_{xx}(0)$	3000
	$S2$	$u_z(B)$	-1.959E-8
		$\theta_y(B)$	1.697E-8
	$S4$	$u_z(B)$	-1.04E-7
		$\theta_y(B)$	9.0E-8
		$\sigma_{xx}(0)$	1273.2395
$M_z=1$	$S1=S3$	$u_y(B)$	1.061E-7
		$\theta_z(B)$	1.225E-7
		$\sigma_{xx}(0)$	1500.0
	$S2$	$u_y(B)$	6.763E-8
		$\theta_z(B)$	7.809E-8
	$S4$	$u_y(B)$	9.0E-7
		$\sigma_z(B)$	1.04E-7
		$\sigma_{xx}(0)$	1273.2395
$M_y=1$	$S1=S3$	$\sigma_{xx} \max(0)$	4550.0
$M_z=1$		$\sigma_{xx} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	1550.0
$F_x=1$			
	$S4$	$\sigma_{xx} \max(0)$	1832.4636
$F_y=1$	$S1, S3$	$\sigma_{xy}(0)$	2000.0
$F_z=1$		$\sigma_{xz}(0)$	2000.0
$M_x=1$		$\sigma_{xx} \max(0)$	9000.0
	$S1, S3$	$\sigma_{xx} \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$	-9000.0
	$S4$	$\sigma_{xx} \max(0)$	3601.27
		$\sigma_{xy}(0)$	668.451

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

2 éléments POU\_D\_T.

Les coefficients de cisaillement sont :

S1 : Section rectangulaire

$$AY = AZ = 1.2 = \frac{1}{k_y}$$

S2 : Section cornière

$$AY = AZ = \frac{1}{0.358}$$

S4 : Section CERCLE

$$AY = AZ = \frac{10}{9}$$

### 4.2 Caractéristiques du maillage

4×2 éléments POU\_D\_T

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On donne seulement les valeurs qui diffèrent de la modélisation A (à cause de la prise en compte du cisaillement transverse).

Chargement	Section	Identification	Référence
$F_y = 1$	S1 = S3	$u_y(B)$	2.0156E-7
		$\sigma_{xy}(0)$	60.
	S2	$u_y(B)$	1.666552E-7
	S4	$u_y(B)$	1.707308E-7
		$\sigma_{xy}(0)$	37.13615
$F_z = 1$	S1, S3	$u_z(B)$	8.0156E-7
		$\sigma_{xz}(0)$	60.
	S2	$u_z(B)$	1.17559754E-6
	S4	$u_z(B)$	1.707308E-7
		$\sigma_{xz}(0)$	37.13615
$F_y = 1$	S4	$\sigma_{xz}(0)$	673.75592
$F_z = 1$		$\sigma_{xy}(0)$	673.75592
$M_x = 1$			



## 5 Modélisation C

---

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

2 éléments POU\_D\_TG.

Le gauchissement n'est pas gêné.

Les coefficients de cisaillement sont identiques à ceux de la modélisation B.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

4×2 éléments POU\_D\_TG

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Chargement	Section	Identification	Référence
$F_y=1$	S1=S3	$u_y(B)$	2.0156E-7
		$\theta_{xy}(0)$	60.
	S2	$u_y(B)$	1.666552E-7
	S4	$u_y(B)$	1.70684E-7
		$\theta_{xy}(0)$	35.367765
$F_z=1$	S1, S3	$u_z(B)$	8.0156E-7
		$\theta_{xz}(0)$	60.
	S2	$u_z(B)$	1.17559754E-6
	S4	$u_z(B)$	1.70684E-7
		$\theta_{xz}(0)$	35.367765

### 5.4 Remarque

Le gauchissement n'est pas gêné. Les résultats sont donc identiques à ceux de la modélisation B.

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments `POU_D_TG`, torsion génée

$$JG = \begin{cases} 5.5556E-8 & \text{pour } S_1 \\ 4.439822E-11 & \text{pour } S_2 \end{cases}$$

en 0  $GRX=0$

### 6.2 Caractéristiques du maillage

- 10 éléments,
- raffinement vers l'encastrement.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Mêmes résultats que pour la modélisation C, sauf ceux qui concernent les effets de gauchissement.

Chargement	Section	Identification	Référence
$F_z=1$	S2	$\theta_x = DRX$	2.62034E-5
		$u_z = DZ$	1.14578E-6
		$GRX$	1.34652E-5
$M_x=1$	S1	$u_z = DZ$	5.52E-7
		$GRX$	2.84E-7
	S2	$u_z$	2.6203E-5
		$\theta_x$	6.3892E-4
		$GRX$	3.28324E-4

### 6.4 Remarques

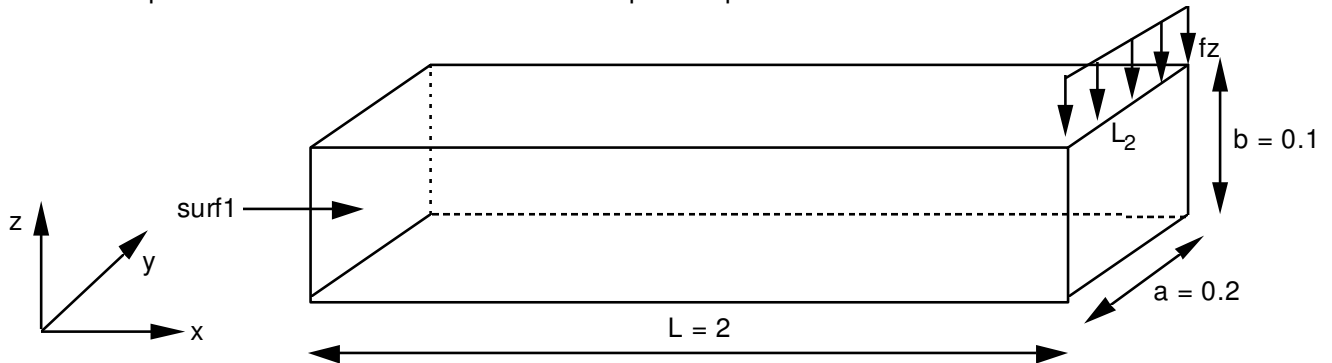
Pour  $\theta_x$  la solution est (cf [bib1]) :

$$\theta_x = \frac{M_x L}{G J_x} + \frac{M_x (1 - e^{2\alpha L} - 2e^{\alpha L})}{\alpha^3 E J G (1 + e^{2\alpha L})} \quad \alpha^2 = \frac{G J}{E J G}$$

## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

La poutre est maillée en éléments massifs quadratiques HEXA20.



La poutre est encastrée au niveau de la section *surf1*. Elle est soumise à un effort tranchant unitaire qui est modélisé par une densité linéique de charge  $fz$  s'appliquant sur les 4 mailles SEG3 constituant l'arête supérieure  $L_2$ .

### 7.2 Caractéristiques du maillage

La poutre est maillée avec 640 éléments massifs quadratiques HEXA20.  
Le modèle comporte 3665 nœuds.

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur de la flèche selon  $z$  du nœud milieu de la section où l'on applique le chargement (nœud  $N62$ ).

Identification	Référence	Aster	% différence
$dz$ du nœud $N62$	-8.0E-7	-7.9523E-7	-0.596

### 7.4 Remarques

La valeur de référence correspond à la valeur donnée par la Résistance Des Matériaux.

## 8 Modélisation F

---

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d'Euler. La section est circulaire pleine, de rayon 0.1m .

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments `POU_D_E`. La longueur de la poutre est  $L=6m$

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

#### 8.3.1 Efforts intérieurs

	Résultats analytiques
$V_y(0)$	6.0000E+03
$V_y(6)$	-1.2000E+04
$MFZ(2\sqrt{3})$	-1.3856E+04

#### 8.3.2 Contrainte

	Résultats analytiques
$SIXX(2\sqrt{3})$	1.7642E+07

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite de Timoshenko avec gauchissement. La section est circulaire pleine, de rayon 0.1m .

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments POU\_D\_TG. La longueur de la poutre est  $L=6m$

### 9.3 Grandeurs testées et résultats

#### 9.3.1 Efforts intérieurs

	Résultats analytiques
$V_y(0)$	6.0000E+03
$V_y(6)$	-1.2000E+04
$MFZ(2\sqrt{3})$	-1.3856E+04

#### 9.3.2 Déplacement (flèche proche du milieu de la poutre)

	Résultats Aster (non régression)	Tolérance (%)
$DY(3.115977734)$	3.23499E-03	1.E-4

## 10 Modélisation H

### 10.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 21 éléments TUYAU\_3M s'appuyant sur des mailles SEG4 .  
L'effort réparti est imposé suivant l'axe  $y$  . la flexion a donc lieu autour de  $z$  .

### 10.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 21 mailles SEG3. La longueur du tuyau est  $L=6m$

### 10.3 Grandeurs testées et résultats

#### 10.3.1 Déplacements

	Résultats analytiques
$D_y \text{ maxi}$	9.38888E-03

#### 10.3.2 Efforts intérieurs

	Résultats analytiques
$V_y(x=0)$	6.0000E+03
$V_y(x=L=6)$	-1.2000E+04
$MFZ 2\sqrt{3}$	-1.3856E+04

#### 10.3.3 Contraintes

Elle sont calculées au point d'abscisse  $x = \frac{L\sqrt{3}}{3}$  qui correspond au moment maximum :

$$M_z(x) = \frac{-1000}{9\sqrt{3}} L^3 = -13856.41 \text{ N.m}$$

Pour l'angle 0 sur la circonférence du tuyau (l'origine des angles étant l'axe  $z$  ), les contraintes sont nulles, et pour l'angle 90, elles sont maximum :

$$\sigma_{xx}^{max} = \frac{M_z^{max}(R-e/2)}{I_z} = -4.87363E+07 \text{ Pa}$$

	Référence	Tolérance
$\sigma_{xx}(\alpha=0)$	0	0,10%
$\sigma_{xx}(\alpha=90)$	-4.87363E+07	1,00%
$MFZ$	-1.3856E+04	1.%

## 11 Modélisation I

---

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 2 éléments `POU_D_EM`.

Le chargement est similaire à celui de la modélisation `A` (moment de torsion uniquement)

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 2 mailles `SEG2`. La longueur de la poutre est  $L = 2\text{ m}$

La poutre est orientée selon le vecteur  $(1, 1, 1)$ .

La section est rectangulaire, identique à celle de la modélisation `A`.

### 11.3 Grandeurs testées et résultats

#### 11.3.1 Déplacement (rotation due au moment de torsion)

	Résultats Aster (non régression)	Tolérance (%)
$DX = DY = DZ$	3.2792525E-07	1.E-6

## 12 Modélisation J

### 12.1 Caractéristiques de la modélisation

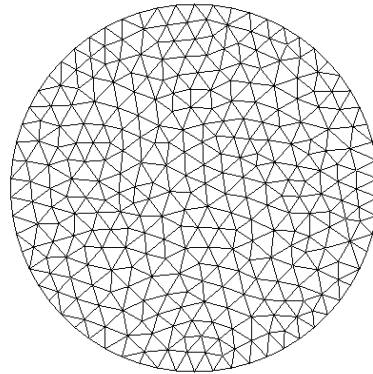
Le modèle est composé de 10 éléments `POU_D_EM`.  
On applique une force répartie de  $6000\text{N}/m$  sur toute la poutre.

### 12.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 mailles `SEG2`. La longueur de la poutre est  $L=6m$

Le maillage de la section est constitué de :

- 373 nœuds
- 62 `SEG2`
- 682 `TRIA3`



### 12.3 Grandeurs testées et résultats

#### 12.3.1 Efforts intérieurs

Efforts intérieurs	Résultats analytiques
$V_y(0)$	6.0000E+03
$V_y(6)$	-1.2000E+04
$MFZ$	-1.3856E+04

#### 12.3.2 Déplacement (flèche proche du milieu de la poutre)

	Résultats Aster (non régression)	Tolérance (%)
$DY(3.115977734)$	3.23499E-03	1.E-4



## 13 Synthèse des résultats

Ce test permet de vérifier simultanément le bon fonctionnement des éléments `POU_D_E`, `POU_D_T` et `POU_D_TG` sur 3 types de sections différentes. La coïncidence parfaite des résultats avec les solutions analytiques (RDM) est normale, et doit toujours être observée, puisque la solution est contenue dans les fonctions de forme des éléments.

De plus, la modélisation E permet de tester le chargement réparti sur des arêtes d'éléments volumiques. L'écart à la solution analytique (RDM) est inférieur à 0.6% .

Les modélisations F, G, H et J permettent de tester le chargement réparti (variation linéaire) pour les éléments de poutre `POU_D_E`, `POU_D_TG`, `POU_D_EM` et les éléments de TUYAU. L'écart à la solution analytique (Résistance des Matériaux) est inférieur à 0.6% .