

## SSL403 - Flambement d'une poutre sous l'effet de son poids propre

---

### Résumé :

Ce test permet de valider en élasticité linéaire le chargement dû aux forces de pesanteur pour une modélisation de type poutre droite d'Euler (POU\_D\_E). Il permet également la mise en œuvre et la validation du calcul de la matrice de rigidité géométrique.

La solution de référence est analytique et les résultats jugés satisfaisants.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

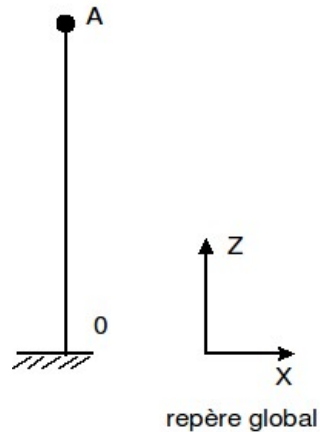


Figure 1.1-a : Poutre verticale.

Section rectangulaire :  $H_y = 0.01 \text{ m}$  ,  $H_z = 0.01 \text{ m}$   
Longueur :  $L = 1 \text{ m}$

### 1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young :  $E = 2.10^{11} \text{ Pa}$   
Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$   
Masse volumique :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

### 1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :  
Extrémité encastree (0) :  $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$ .

**Chargement :**

Force de pesanteur :  $p$  poids par unité de longueur avec  $g = (0, 0, -9.81)$  (donné en repère global).

## 2 Solutions de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

En repère local,  $x$  suivant l'axe  $OA$  de la poutre, le moment fléchissant, à l'abscisse  $x$ , a pour expression :

$$M_{F_y}(x) = p \int_x^L [v(\xi) - v(x)] d\xi.$$

La flèche  $v(x)$  satisfait donc l'équation :

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = p \int_x^L [v(\xi) - v(x)] d\xi = -p \left[ \int_x^L v(\xi) d\xi + (L-x)v(x) \right]$$

En dérivant les deux membres, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{p}{E I_z} (L-x) \frac{dv}{dx} = 0$$

La fonction  $v'(x) = \frac{dv}{dx}$  satisfait l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre :

$$\frac{d^2 v'}{dx^2} + \frac{p}{E I_z} (L-x) v' = 0,$$

qui peut être résolue à l'aide des fonctions de Bessel. On trouve alors la valeur du poids linéique critique égale à :

$$p_c = 7,837 \frac{E I_z}{L^3}.$$

La solution analytique donne numériquement :

$$p_c = 7,837 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{10^{-8}}{12} = 1,3061667 \cdot 10^3.$$

### 2.2 Résultats de référence

La valeur critique du multiplicateur  $\lambda$  :  $\lambda_c = \frac{P_c}{\rho S g}$

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

### 2.4 Références bibliographiques

- [1] Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres Aster »

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 10 éléments poutre droite d'Euler.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Il est constitué de 10 éléments POU\_D\_E.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Valeur propre du système  $(K + \lambda K_G) X = 0$  :

	Référence	Erreur
$\lambda$	170.701	0.01

### 3.4 Remarque

Puisque  $p_c = \lambda \rho S g$ , ( $\rho S g$  représente la pré-contrainte linéique), nous avons comme chargement critique :  $p_c = 1300,84 \text{ N.m}^{-1}$ .

## 4 Synthèse des résultats

---

Les résultats sont très proches de la solution analytique (écart : 1% pour 10 éléments). Cet écart est fonction de la finesse de discrétisation étant données les hypothèses utilisées pour la rigidité géométrique (cf. [R3.08.01]). Ceci valide donc ce type de chargement pour le flambement d'Euler.