

## SSLS144 - Cylindre sous pression interne

---

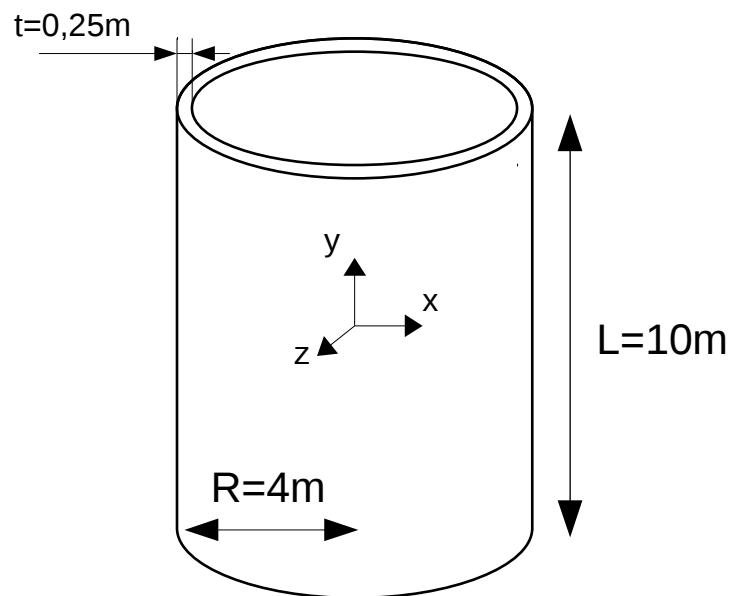
### Résumé :

Ce test valide la modélisation `COQUE_AXIS` (portée par des mailles `SEG3`). On effectue un calcul statique sur un réservoir cylindrique sous pression interne. Le modèle est axisymétrique. La distribution de pression sur la paroi interne du réservoir n'est pas uniforme. Les déplacements et les efforts généralisés obtenus sont comparés à une solution de référence analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

On considère un cylindre de rayon moyen  $5\text{ m}$ , d'épaisseur  $t=0.25\text{ m}$  et de longueur  $L=10\text{ m}$ . Les dimensions géométriques choisies permettent de négliger les effets de bord libre en  $y=\pm L/2$  (en axisymétrie,  $L$  doit vérifier :  $\frac{1}{2}L > 3\sqrt{Rt} = 3\text{ m}$ ).



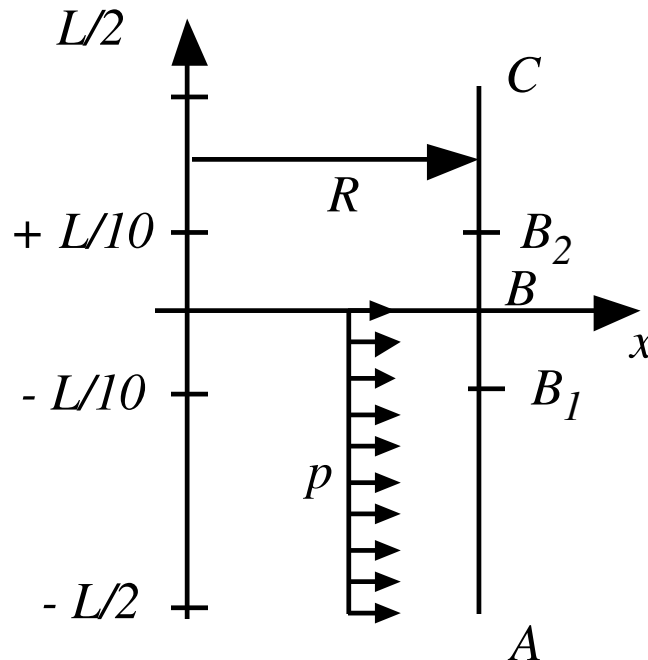
### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau élastique isotrope est caractérisé par les propriétés suivantes :

- $E=1\text{ Pa}$
- $\nu=0.3$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le cylindre vertical est soumis à une pression interne  $p=1 Pa$  constante sur la partie  $y \leq 0$ , et nulle sur  $y > 0$ . On impose un déplacement vertical  $u_y=0$  au point  $A$ .



## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

On se place dans la théorie de LOVE-KIRCHHOFF pour le calcul de la solution analytique de ce problème.

La flèche dans le repère axisymétrique s'écrit :

$$u_x = \begin{cases} \frac{P}{8\alpha^4 D} (2 - e^{\alpha y} \cos(\alpha y)) & \forall y \leq 0 \\ \frac{P}{8\alpha^4 D} e^{-\alpha y} \cos(\alpha y) & \forall y \geq 0 \end{cases}$$

avec  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  et  $4\alpha^4 = \frac{Et}{DR^2}$ .

La rotation s'écrit :

$$\beta_s = \begin{cases} \frac{P}{8\alpha^3 D} e^{\alpha y} (\cos(\alpha y) - \sin(\alpha y)) & \forall y \leq 0 \\ \frac{P}{8\alpha^3 D} e^{-\alpha y} (\cos(\alpha y) + \sin(\alpha y)) & \forall y \geq 0 \end{cases}$$

Les efforts généralisés sont :

$$N_{\theta\theta} = \frac{Et}{R} u_x(y),$$

$$M_{ss} = Du_x''(y) = \frac{P}{4\alpha^2} e^{-|y|} \sin(\alpha y)$$

Les contraintes tridimensionnelles sont :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N_{\theta\theta}}{t} + 12 \frac{M_{\theta\theta}(x-R)}{t^3},$$

$$\sigma_{ss} = 12 \frac{M_{ss}(x-R)}{t^3},$$

soit :

$$\sigma_{\theta\theta}(y, x) = \begin{cases} \frac{pR}{t} \left( 1 - \frac{e^{\alpha y}}{2} \left( \cos(\alpha y) + 2\nu \frac{R-x}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \sin(\alpha y) \right) \right) & \forall y \leq 0 \\ \frac{pR}{t} \cdot \frac{e^{-\alpha y}}{2} \left( \cos(\alpha y) - 2\nu \frac{R-x}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \sin(\alpha y) \right) & \forall y \geq 0 \end{cases},$$

et :

$$\sigma_{ss}(y, x) = \begin{cases} \frac{pR}{t} \cdot \frac{x-R}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} e^{\alpha y} \sin(\alpha y) & \forall y \leq 0 \\ \frac{pR}{t} \cdot \frac{x-R}{t} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} e^{-\alpha y} \sin(\alpha y) & \forall y \geq 0 \end{cases}.$$

## 2.2 Grandeurs et résultats de référence

On teste les valeurs suivantes :

- la flèche  $DX$  aux points  $A$  ,  $B$  et  $C$  ,
- la rotation  $DRZ$  , aux points  $A$  et  $B$  ,
- l'effort généralisé  $NY Y$  aux points  $B$  et  $B_1$  ,
- le moment généralisé  $MXX$  au point  $B_1$

## 2.3 Références bibliographiques

- [1] S. ANDRIEUX - F. VOLDOIRE : Modèles de coques. Applications en statique linéaire. Ecole d'Été CEA-EDF-INRIA d'Analyse Numérique 1992.

## 2.4 Incertitudes sur la solution

Il n'y en a pas

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation `COQUE_AXIS`. Les modèles de `COQUE_AXIS` sont utilisables aussi bien pour les plaques épaisses (HENCKY-MINDLIN-REISSNER) que pour les plaques minces (KIRCHOFF-LOVE) grâce à une approche par pénalisation qui permet de neutraliser ou non l'énergie de cisaillement : c'est la théorie de HENCKY-MINDLIN-NAGHDI. Afin de se rapprocher numériquement de la solution de LOVE-KIRCHHOFF, il faut prendre un coefficient de cisaillement suffisamment grand (`A_CIS`) pour inhiber la cinématique de cisaillement transverse  $\gamma_s$ . Plus ce coefficient est grand, plus la matrice de rigidité est presque singulière donc source d'instabilités numériques.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 100 éléments de type `SEG3`.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste le déplacement dans le coin haut gauche de la plaque.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
Point <i>A</i> - <i>DX</i>	'ANALYTIQUE'	63.9488	0.1%
Point <i>B</i> - <i>DX</i>	'ANALYTIQUE'	32.000	0.1%
Point <i>C</i> - <i>DX</i>	'ANALYTIQUE'	0.05120	0.05
Point <i>A</i> - <i>DRZ</i>	'ANALYTIQUE'	0.06583	0.05
Point <i>B</i> - <i>DRZ</i>	'ANALYTIQUE'	41.133	0.1%
Point <i>B</i> - <i>NY</i>	'ANALYTIQUE'	2.0000	0.05
Point <i>B1</i> - <i>NY</i>	'ANALYTIQUE'	3.84429	0.1%
Point <i>B1</i> - <i>MX</i>	'ANALYTIQUE'	-4.01497 10 <sup>-2</sup>	0.1%

## 4 Synthèse des résultats

---

Les différentes courbes montrent que les déplacements ainsi que les efforts calculés sont très proches de la solution analytique. Ce test permet donc bien de valider la formulation de coque axisymétrique COQUE\_AXIS.