SSLV131 - Orthotropie dans un repère quelconque

Résumé

Ce cas test valide les modélisations relatives à l'élasticité linéaire qui mettent en œuvre des matériaux orthotropes dont les propriétés sont connues dans un repère défini par l'utilisateur différent du repère global.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le repère global est le repère (A, X, Y, Z). Dans ce repère les coordonnées des nœuds sont :

$A(0., 0., 0.)$
$B(3., 1., 0.)$
$C(2., 3., 0.)$
$D(3., 1., -1)$

On étudiera le comportement du tétraèdre $ABCD$ dont les propriétés matérielles sont définies dans un repère local (A, x, y, z) obtenu par rotation du repère global selon les angles nautiques $(\alpha=30°, \beta=20°, \gamma=10°)$.

1.2 Propriétés du matériau

Les matériaux utilisés sont orthotrope et isotrope transverse. Afin de valider les déformations orthotropes d'origine thermique, on fait aussi un calcul thermomécanique.

On adopte la convention de terminologie utilisée dans Code_Aster. Soit les suffixes L, T et N signifient Longitudinal, Transversal et Normal.

Les unités ne sont pas précisées.

$$E_L = 11000,\ E_T = 5000,\ E_N = 8000,$$
$$\nu_{LT} = 0.396,\ \nu_{LN} = 0.15,\ \nu_{TN} = 0.11$$
$$G_{LT} = 10500,\ G_{LN} = 7000,\ G_{TN} = 13000$$
$$\alpha_L = 10^{-3}, \alpha_T = 1.5\,10^{-3}, \alpha_N = 2\,10^{-3}$$

(On sait que $\nu_{LT} = \frac{E_L}{E_T}\nu_{TL}, \nu_{LN} = \frac{E_L}{E_N}\nu_{NL},\ \nu_{TN} = \frac{E_T}{E_N}\nu_{NT}$,

soit $\nu_{TL} = 0.18, \nu_{NL} = 0.1091, \nu_{NT} = 0.176$

Pour l'isotropie transverse, on garde les mêmes valeurs en sachant que :

$$E_T = E_L = 11000, \nu_{\mathrm{TN}} = \nu_{LN} = 1.15 \text{ et } \mathrm{G}_{\mathrm{LT}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{L}}}{2(1+\nu_{\mathrm{LT}})}$$

On rappelle que ces coefficients sont définis dans un repère local (A, L, T, N) tourné avec les angles nautiques $(30°, 20°, 10°)$ par rapport au repère global.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet. On fait l'hypothèse d'un champ de déplacement linéaire en x et y de telle sorte que le champ de déformation est constant.

Conditions de Dirichlet $dX=2x+3y+4z$
$dY=3x+5y+6z$
$dZ=4x+6y+7z$

Conditions thermiques Température imposé sur toute la structure de 100

On va donc imposer :

- pour le nœud A $dX=0, dY=0, dZ=0$
- pour le nœud B $dX=9, dY=14, dZ=18$
- pour le nœud C $dX=13, dY=21, dZ=26$
- pour le nœud D $dX=5, dy=8, dZ=11$

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Le calcul est analytique.
On a utilisé le programme de calcul formel Mathématica pour le réaliser.

On sait que le champ de déplacement est :

$$dX=2x+3y+4z$$
$$dY=3x+5y+6z$$
$$dZ=4x+6y+7z$$

Le champ de déformations ε_G dans le repère global est donc constant et égal à :

$$\varepsilon_G=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 5 & 6\\4 & 6 & 7\end{vmatrix}$$

Soit P la matrice de passage permettant de faire passer un vecteur du repère global (A, X, Y, Z) au repère local (A, L, N, T).

Soit $\varepsilon_{\mathbf{L}}$ le tenseur de déformation dans le repère local. On a : $\varepsilon_L=P\cdot\varepsilon_G\cdot P^T$

Le tenseur de Hooke H_L est connu dans le repère local, soit σ_L le tenseur des contraintes dans ce repère. On a :

$$\sigma_L=H_L.\varepsilon_L$$

On obtient le tenseur σ_G des contraintes dans le repère global par : $\sigma_G=P^T.\sigma_L.P$

Dans le cas où on applique un champ de température, les équations ci-dessus sont modifiées comme suit :

Le champ de déformations ε_G dans le repère global est toujours le même :

$$\varepsilon_G = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Soit $\varepsilon_{\mathbf{L}}$ le tenseur de déformation dans le repère local. On a : $\varepsilon_{\mathbf{L}} = P.\varepsilon_G.P^T$
Le tenseur des déformations mécaniques dans le repère local vaut donc :

$$\varepsilon_L^{mec} = \varepsilon_L - \varepsilon_L^{ther} \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_{Lxx}^{ther} = \alpha_L\left(T - T_{ref}\right) \\ \varepsilon_{Lyy}^{ther} = \alpha_T\left(T - T_{ref}\right) \\ \varepsilon_{Lzz}^{ther} = \alpha_N\left(T - T_{ref}\right) \end{cases} \text{, les autres composantes étant nulles}$$

Le tenseur de Hooke H_L est connu dans le repère local. Soit σ_L le tenseur des contraintes dans ce repère. On a :

$$\sigma_L = H_L.\varepsilon_L^{mec}$$

On obtient le tenseur σ_G des contraintes dans le repère global par : $\sigma_G = P^T.\sigma_L.P$

2.2 Résultats de référence

Ils sont obtenus en effectuant les opérations décrites ci-dessus avec Mathematica.

2.3 Incertitudes sur la solution

L'incertitude est nulle car la solution est analytique.

2.4 Références bibliographiques

Pour la description des matrices de Hooke pour des matériaux isotrope transverse et orthotrope pour les modélisations 3D, contraintes planes et déformations planes, la référence choisie a été :
'Matrice de Hooke pour les matériaux orthotropes'. Rapport interne applications en Mécanique n° 79-018 de Jean-Claude Masson CISI.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation 3D est mise en œuvre. On teste les matériaux isotrope transverse et orthotrope (avec éventuellement prise en compte de déformations d'origines thermiques)

Remarques :

- L'isotropie transverse n'est pas testée pour les contraintes planes car ce cas correspond à l'isotropie.
- Pour le cas axisymétrique le champ de contraintes dépend du point de calcul.
- Ce point est choisi au point d'intégration du triangle (i.e. c'est le centre de gravité du triangle).
- On rappelle que l'orthotropie dans un repère quelconque n'est pas disponible pour la modélisation en Fourier car il y a alors couplage de toutes les composantes du tenseur de contraintes :

La mise en œuvre actuelle permet de n'utiliser que les composantes symétriques à partir desquelles on peut retrouver les composantes antisymétriques mais pour que ce soit possible, il ne faut pas que les glissements induisent des contraintes de traction.

3.2 Caractéristiques du maillage

On a un élément tétraèdre à 4 nœuds $ABCD$.

3.3 Valeurs testées

Identification	**Référence**
Cas de l'isotropie transverse 3D	
nom du résultat : $Mest1$	
champ de déplacement	
$dy(c)$	21
champ `EPSI_ELGA`	
$EPXY$	3
$EPXZ$	4
$EPYZ$	6
champ `SIEF_ELGA`	
$SIXX$	43310.760
$SIYY$	72798.710
$SIZZ$	62459.356
$SIXY$	39567.891
$SIXZ$	31078.597
$SIYZ$	84049.301
champ `SIGM_ELNO`	
$SIXX$	43310.760
champ emel–elga Ep	1.19123 E6
Champ emel–elno–elga Ep	1.19123 E6

Cas de l'orthotropie 3D	
nom du résultat : $Mest2$	
champ de déplacement	
$dy(c)$	21
champ `EPSI_ELGA`	
$EPXY$	3
$EPXZ$	4
$EPYZ$	6
champ `SIEF_ELGA`	
$SIXX$	601.8754
$SIYY$	80053.665
$SIZZ$	78596.607
$SIXY$	83948.263
$SIXZ$	17339.093
$SIYZ$	126571.71
champ enel–elga Ep	$1.55286.10^{6}$
champ enel–elno–elga Ep	$1.55286.10^{6}$
Cas de l'orthotropie avec prise en compte des déformations thermiques (commande `STAT_NON_LINE`)	
nom du résultat : $Mest3$	
champ de déplacement	
$dy(c)$	21
Identification	**Référence**
champ `EPSI_ELGA`	
$EPXY$	3
$EPXZ$	4
$EPYZ$	6
champ `SIEF_ELGA`	
$SIXX$	1226.2014
$SIYY$	78597.064
$SIZZ$	76585.792
$SIXY$	83710.907
$SIXZ$	17255.703
$SIYZ$	126657.367
Cas de l'orthotropie avec prise en compte des déformations thermiques (commande `MECA_STATIQUE`)	
nom du résultat : $Mest4$	
champ de déplacement	
$dy(c)$	21
champ `EPSI_ELGA`	
$EPXY$	3
$EPXZ$	4
$EPYZ$	6
champ `SIEF_ELGA`	

SIXX	1226.2014
SIYY	78597.064
SIZZ	76585.792
SIXY	83710.907
SIXZ	17255.703
SIYZ	126657.367

4 Synthèse des résultats

Les résultats fournis par Mathématica et *Aster* sont identiques pour toutes les modélisations utilisables avec des matériaux isotrope transverse et orthotrope.