

## SDND105 – Choc d'un point matériel contre une paroi avec flambage plastique

---

### Résumé :

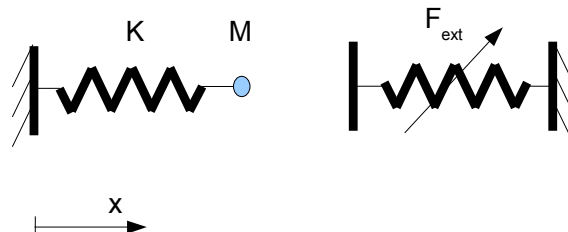
Ce test valide le comportement d'un obstacle de type choc avec flambage éventuel. La résolution a été réalisée avec l'opérateur `DYNA_VIBRA` en utilisant le mot clé `FLAMBAGE`.

On calcule l'instant de début de flambage (cet instant correspond au premier instant où la force de choc a dépassé le seuil de flambage), la déformation plastique cumulée et l'instant où l'on revient à la position initiale.

Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats analytiques.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



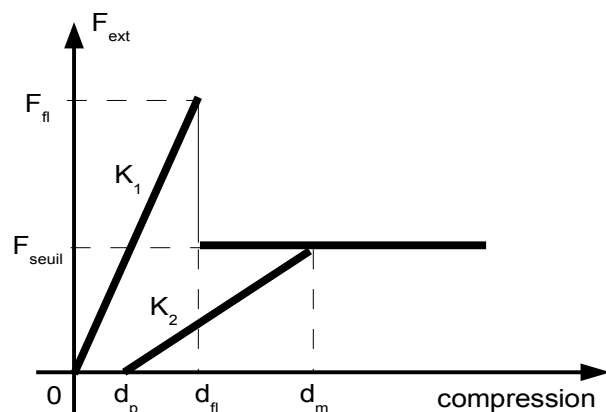
### 1.2 Propriétés du matériau

#### Pour les modélisations A et B

$$K = 10^{-7} \text{ N/m}$$

$$M = 1 \text{ kg}$$

La force de réaction  $F_{ext}$  dépend de la compression de la paroi qui suit la loi ci-dessous :



Avec :

$$K_1 = 1 \text{ N/m}$$

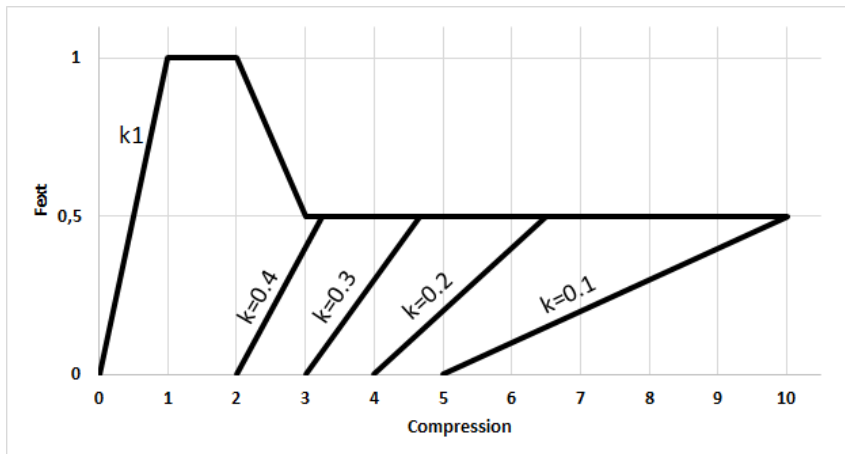
$$F_{fl} = 1 \text{ N}$$

$$F_{seuil} = 0.5 \text{ N}$$

$$K_2 = 0.5 \text{ N/m}$$

#### Pour la modélisation C

La relation force-compression est présentée dans la figure ci-dessous et dans le détail des paramètres.



Avec :

$$K_1 = 1 \text{ N/m}$$

$$F_{fl} = 1 \text{ N}$$

$$F_{seuil} = 0.5 \text{ N}$$

$$\text{LARG\_PLAT} = 1$$

$$\text{ENFO\_FL} = 1$$

$$\text{DEPL\_POST\_FL} = [2., 3., 4., 5.]$$

$$\text{RIGI\_POST\_FL} = [0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

On impose le déplacement de la masse mobile  $M$  suivant l'axe des  $x$ .

## 1.4 Conditions initiales

### Pour les modélisations A et B

À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à  $2 \text{ m/s}$ .

La paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

### Pour la modélisation C

À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à  $2.828427125 \text{ m/s}$ .

À l'état initial, la paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

Le problème consiste à analyser la réponse d'une masse mobile soumise à une vitesse initiale non nulle et venant choquer contre une paroi qui suit une loi de comportement de type flambage.

L'équation d'équilibre du système s'écrit :

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + Kx = F_{ext} \quad (1)$$

La résolution de (1) se déroule en plusieurs phases : avant flambage de la paroi, chargement après flambage, déchargement après flambage et vol libre.

#### 2.1.1 Première phase

Avant le flambage, la force de réaction vaut :  $F_{ext} = -K_1 x$

La solution de l'équation (1) se met sous la forme suivante :  $x(t) = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t$

Avec :  $\omega_1^2 = \frac{K + K_1}{M}$

En tenant compte des conditions initiales :  $x(0) = 0$  et  $\frac{\partial x}{\partial t}(0) = v_0$

On identifie :  $A_1 = \frac{v_0}{\omega_1}$  et  $B_1 = 0$

Soit :  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t$

On atteint le seuil limite de flambage  $F_{fl}$  à l'instant  $t_{fl}$ , tel que :  $x(t_{fl}) = d_{fl} = \frac{F_{fl}}{K_1}$ .

D'où :  $t_{fl} = \frac{1}{\omega_1} \text{Arc sin} \left( \frac{F_{fl} \omega_1}{K_1 v_0} \right)$

et  $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl}) = v_{fl}$

#### 2.1.2 Deuxième phase

La phase suivante est la phase de chargement après flambage ; la force de réaction est constante tant que la vitesse reste positive. Cette force de réaction vaut :  $F_{ext} = -F_{seuil}$  et la solution de

l'équation (1) s'écrit :  $x(t) = A_2 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t - \frac{F_{seuil}}{M \omega_0^2}$

Avec :  $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$

Comme  $\omega_0^2 \ll 1$ , on peut effectuer un développement limité des fonctions trigonométriques.

Soit :  $x(t) = A_{21} t^2 + B_{21} t + C_{21}$ .

En tenant compte des conditions initiales  $x(t_{fl})=d_{fl}$  et  $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl})=v_{fl}$ , on obtient :

$$A_{21} = \left( \frac{v_{fl} t_{fl}}{2} - \frac{d_{fl}}{2} - \frac{F_{seuil}^2}{4M} \right) \omega_0^2 - \frac{F_{seuil}}{2M}$$

$$B_{21} = v_{fl} + \frac{F_{seuil} t_{fl}}{M} + \left( d_{fl} t_{fl} - \frac{v_{fl} t_{fl}^2}{2} \right) \omega_0^2$$

$$C_{21} = d_{fl} - \frac{F_{seuil} t_{fl}^2}{2M} - v_{fl} t_{fl} - \frac{d_{fl} t_{fl}^2}{2} \omega_0^2$$

L'instant auquel la vitesse s'annule est :  $t_m = -\frac{B_{21}}{2A_{21}}$

En négligeant les termes en  $\omega_0^2$ , on déduit :  $t_m = t_{fl} + \frac{M v_{fl}}{F_{seuil}}$ ,

et le déplacement maximal vaut :  $x(t_m) = d_m$

Cela permet d'obtenir la déformation plastique cumulée :  $d_p = d_m - \frac{F_{seuil}}{K_2}$

### 2.1.3 Troisième phase

Cette phase correspond au déchargement, la force de réaction vaut :  $F_{ext} = -K_2(x - d_p)$

La solution de l'équation (1) s'écrit :  $x(t) = A_3 \sin \omega_2 t + B_3 \cos \omega_2 t + \frac{K_2 d_p}{K + K_2}$

Avec :  $\omega_2^2 = \frac{K + K_2}{M}$

En tenant en compte des conditions initiales  $x(t_m) = d_m$  et  $\frac{\partial x}{\partial t}(t_m) = 0$ ,

on obtient :  $A_3 = \left( d_m - \frac{K_2 d_p}{K + K_2} \right) \sin \omega_2 t_m$  et  $B_3 = \left( d_m - \frac{K_2 d_p}{K + K_2} \right) \cos \omega_2 t_m$ .

La force de réaction s'annule lorsque le déplacement du point matériel atteint la valeur de la déformation plastique cumulée  $d_p$ .

Comme  $K \ll K_2$ , on fait l'approximation suivante :  $\frac{K_2 d_p}{K + K_2} \approx d_p$ .

Ainsi, l'instant  $t_d$  qui correspond à l'annulation de la force de réaction est tel que :

$$x(t_d) = d_p = A_3 \sin \omega_2 t_d + B_3 \cos \omega_2 t_d + d_p$$

Soit :  $\sin \omega_2 t_m \sin \omega_2 t_d + \cos \omega_2 t_m \cos \omega_2 t_d = \cos \omega_2 (t_d - t_m) = 0$ .

D'où :  $t_d = t_m + \frac{\pi}{2\omega_2}$ .

## 2.1.4 Quatrième phase

La phase suivante correspond à la phase de vol libre  $F_{ext} = 0$ .

La solution de l'équation (1) s'écrit :  $x(t) = A_4 \sin \omega_0 t + B_4 \cos \omega_0 t$

Les conditions initiales sont :

$$x(t_d) = d_p \text{ et } \frac{\partial x}{\partial t}(t_d) = v_d = \omega_2 \left( x_m - \frac{K_2 d_p}{K + K_2} \right) \sin \omega_2 (t_m - t_d)$$

Ce qui donne :

$$A_4 = d_p \sin \omega_0 t_d + \frac{v_d}{\omega_0} \cos \omega_0 t_d$$

$$B_4 = d_p \cos \omega_0 t_d - \frac{v_d}{\omega_0} \sin \omega_0 t_d$$

Comme  $\omega_0^2 \ll 1$ , en effectuant un développement limité des fonctions trigonométriques jusqu'à l'ordre 2, la solution se met sous la forme suivante :

$$x(t) = A_{41} t^2 + B_{41} t + C_{41}$$

Avec :

$$A_{41} = \frac{\omega_0^2}{2} \left[ v_d t_d - d_p \left( 1 - \frac{\omega_0^2 t_d^2}{2} \right) \right]$$

$$B_{41} = d_p t_d \omega_0^2 + v_d \left( 1 - \frac{\omega_0^2 t_d^2}{2} \right)$$

$$C_{41} = d_p \left( 1 - \frac{\omega_0^2 t_d^2}{2} \right) - v_d t_d$$

En négligeant les termes en  $\omega_0^2$ , on obtient :

$$x(t) = v_d t + d_p - v_d t_d.$$

Et on déduit l'instant  $t_0$  de passage à la position initiale ( $x = 0$ ).

$$\text{Soit : } t_0 = t_d - \frac{d_p}{v_d}.$$

## 2.1.5 Solution de référence de la modélisation C

Les conditions initiales choisies permettent d'avoir une énergie de  $4J$ , qui doit conduire à une compression totale de  $6.5m$  et une compression résiduelle de  $4m$ .

## 2.2 Grandeurs et résultats de référence

### Pour les modélisations A et B

On se propose de tester les grandeurs suivantes :

$t_{fl}$  : instant de début de flambage ;

$d_p$  : déformation plastique cumulée ;

$t_0$  : instant de repassage à la position initiale (après flambage et décharge).

Compte tenu des valeurs numériques des données d'entrée, on obtient :

$$t_{fl} = \frac{\pi}{6} \text{ (exprimé en secondes)}$$

$$d_p = 3 \text{ (exprimée en mètres)}$$

$$t_0 = \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi+6}{\sqrt{2}} \text{ (exprimé en secondes)}$$

### Pour la modélisation C

Compression résiduelle  $d_p = 4$  (exprimée en mètres)

Vitesse de rebond après le choc  $V_{rebond} = -1.118033989$  (exprimée en mètres par seconde)

## 2.3 Incertitudes sur la solution

La solution de référence est analytique (au second ordre près).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type `PLAN_Y`.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé `FLAMBAGE` de l'opérateur `DYNA_VIBRA`.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (`EULER`, `ADAPT_ORDRE2` et `DEVOGE`). Avec le schéma en temps adaptatif `ADAPT_ORDRE2` on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : `PAS` = 0.0002,
- la valeur maximale du pas de temps : `PAS_MAXI` = 0.001,
- la valeur minimale du pas de temps : `PAS_MINI` = 2.E-8.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de maille : 1 `SEG2`

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

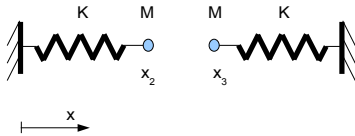
Identification	Référence	Type de référence	Précision
$t_f$	$\frac{\pi}{6} s$	'ANALYTIQUE'	0.1 %
$d_p$	3 m	'ANALYTIQUE'	0.1 %
$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi+6}{\sqrt{2}}\right)$	0 m	'ANALYTIQUE'	3.E-3 m



## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, on considère deux points matériels mobiles selon le schéma suivant :



Le système est parfaitement symétrique. On obtient la même formulation que la modélisation A si on choisit des rigidités normales de choc égales à la moitié des rigidités choisies pour la modélisation A.

En effet, si on note :  $x_2 = -x_3 = x$

La force de réaction  $F_{ext}$  se met sous la forme suivante :

Pendant la première phase :  $F_{ext} = -K_1(x_2 - x_3) = -2K_1x$

Pendant la deuxième phase :  $F_{ext} = -F_{seuil}$

Pendant la troisième phase :  $F_{ext} = -K_2(x_2 - x_3 - 2d_p) = -2K_2(x - d_p)$

Pendant la quatrième phase :  $F_{ext} = 0$

On modélise le problème avec un obstacle de type `BI_PLAN_Y`.

À l'instant initial, les deux points matériels sont en contact avec une vitesse initiale égale à  $2\text{ m/s}$ .

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé `FLAMBAGE` de l'opérateur `DYNA_VIBRA`, avec les schémas en temps `EULER` et `ADAPT_ORDRE2`.

Avec le schéma en temps adaptatif `ADAPT_ORDRE2`, on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : `PAS = 0.001`,
- la valeur maximale du pas de temps : `PAS_MAXI = 0.005`.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles : 2 `SEG2`

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au comportement de flambage pendant le choc.

Identification	Référence	Type de référence	Précision
$t_{fl}$	$\frac{\pi}{6}\text{ s}$	'ANALYTIQUE'	0.01 %
$d_p$	3 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi+6}{\sqrt{2}}\right)$	0 m	'ANALYTIQUE'	1.E-4 m

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation on réutilise la modélisation A pour tester une forme plus complexe de la loi de flambage.

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type `PLAN_Y`.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé `FLAMBAGE` de l'opérateur `DYNA_VIBRA`.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (`EULER`, `ADAPT_ORDRE2` et `DEVOGE`). Avec le schéma en temps adaptatif `ADAPT_ORDRE2` on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : `PAS = 0.0002`,
- la valeur maximale du pas de temps : `PAS_MAXI = 0.001`,
- la valeur minimale du pas de temps : `PAS_MINI = 2.E-8`.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2

Nombre de maille : 1 `SEG2`

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

Identification	Référence	Type de référence	Précision
$d_p$	4 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
$V_{rebond}$	-1.118033989 m/s	'ANALYTIQUE'	0.01 %

## 6 Synthèse des résultats

---

Les écarts entre les solutions obtenues avec Aster et les solutions analytiques sont très faibles.