

---

## SDNV104 - Réponse dynamique d'un patin frottant rigide soumis à une pression et une force de rappel

---

### Résumé

On considère une masse en contact frottant avec un plan rigide. Elle est retenue par un ressort et on lui impose une pression latérale. Le frottement est modélisé par la loi de Coulomb. Le calcul est un calcul dynamique direct.

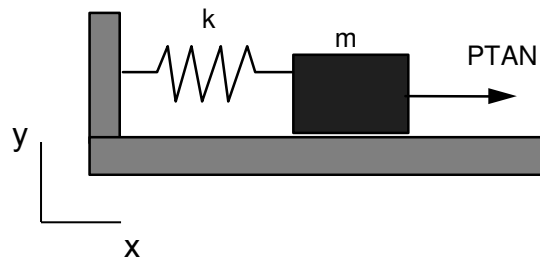
La solution de référence est analytique.

Les modélisations proposées utilisent `DYNA_NON_LINE` avec une loi de comportement élastique en 2D, pour deux solveurs. Le contact est géré par différentes méthodes disponibles dans `AFFE_CHAR_MECA`.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Le système considéré est constitué d'un patin : carré de 1m sur 1m, posé sur un support. Il est soumis à son poids, à la force de rappel d'un ressort de raideur  $k$  et à une pression latérale. Le contact est un contact frottant.



### 1.2 Propriétés du modèle

|                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| Masse :                    | $7.10^3 \text{ kg}$            |
| Raideur du ressort :       | $24.10^3 \text{ N/m}$          |
| Coefficient de Coulomb :   | 0,3                            |
| Pesanteur :                | $70\,000 \text{ Pa}$           |
| Pression Latérale :        | $200\,000 \text{ Pa}$          |
| Module d'Young du patin :  | $2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ |
| Module d'Young du massif : | $1,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ |
| Coefficient de poisson :   | 0                              |

### 1.3 Conditions aux limites, conditions initiales et chargements

La masse repose sur le plan rigide à la cote  $x=0$ .

Les chargements de poids et de pression latéral sont appliqués avec une rampe qui atteint son maximum en 0,07 seconde.

Le support est encastré en  $x$  et en  $y$ .

## 2 Solution de référence

La solution de référence est analytique.

Si l'on considère le patin comme suffisamment rigide on peut l'assimiler à une masse ponctuelle, il existe alors une solution analytique à ce problème de masse-ressort frottant. On fait l'hypothèse que l'application du chargement se fait immédiatement (pas de rampe).

Comme  $\frac{F_t}{F_n} > \mu$  il n'y a jamais de phase d'adhérence mais seulement du glissement. La force de frottement vaut donc  $f = \mu F_n$

On peut écrire l'équation du mouvement ainsi :

$$m \ddot{x} + k x = F_t \pm f$$

On note :  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

**Étape 1 : La force de frottement s'oppose au mouvement qui s'effectue d'abord suivant les  $x$  positifs**

$$m \ddot{x} + k x = F - f$$

avec une abscisse et une vitesse initiale nulle. On a alors la solution suivante après prise en compte de ces conditions initiales :

$$x(t) = \frac{F - f}{k} (1 - \cos(\omega t))$$

ce résultat est valable tant que la vitesse reste positive soit  $\dot{x} \geq 0$ , c'est-à-dire jusqu'à  $\omega \cdot t = \pi$ .

Le premier extremum de la courbe  $x(t)$  est  $x_1 = 2 \cdot \frac{F - f}{k}$ .

**Étape 2 : La force de frottement change de signe pour s'opposer au mouvement qui se fait maintenant suivant les  $x$  négatifs**

$$m \ddot{x} + k x = F + f$$

l'abscisse initiale vaut  $x_1$ , et la vitesse initiale est nulle. On a alors, en posant la nouvelle abscisse des temps comme origine à  $\pi/\omega$  :

$$x(t) = \frac{F + f}{k} + \frac{F - 3f}{k} \cos(\omega t), \text{ jusqu'à } \omega \cdot t = \pi.$$

Le deuxième extremum de la courbe  $x(t)$  est  $x_2 = \frac{4f}{k}$ .

**Étape  $2n - 1$  et  $2n$  :**

On sépare le mouvement selon le signe de la vitesse. Pour une étape impaire le mouvement se fait selon les  $x$  positifs. Pour une étape paire, le mouvement se fait suivant les  $x$  négatifs.

On démontre par récurrence le résultat suivant :

$$x_{2p-1} = x((2p-1)T) = \frac{2(F - (2p-1)f)}{k}$$
$$x_{2p} = x(2pT) = \frac{4pf}{k}$$

avec  $T = \frac{\pi}{\omega}$  et  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

L'arrêt du mouvement se produit lorsque  $x_n$  est compris entre  $\frac{F_t - f}{k}$  et  $\frac{F_t + f}{k}$ .

## 2.1 Résultats de référence

Les modélisations proposées ci-dessous correspondent à la solution analytique jusqu'à l'arrêt du patin. Par souci d'économie de temps de calcul, on ne teste que les deux premiers extremums.

| Temps ( s ) | Déplacement en $x$ ( m ) |
|-------------|--------------------------|
| 1,697       | 14,917                   |
| 3,393       | 3,500                    |

## 2.2 Incertitude sur la solution

La solution analytique donne un résultat exact sous l'hypothèse de corps infiniment rigides. On suppose également que le chargement est appliqué directement (il ne dépend pas du temps).

## 3 Modélisation B

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est `D_PLAN`. Le patin et le support sont modélisés par des surfaces maillées en `QUAD4`. Un élément `2D_DIS_T` représente le ressort, sa composante non nulle est dans la direction  $x$ .

On utilise l'opérateur `DYNA_NON_LINE` pour effectuer le calcul dynamique. Les efforts de contact sont pris en compte par `AFFE_CHAR_MECA / CONTACT`, avec la méthode `PENALISATION`.

### 3.2 Caractéristiques du maillage



Nombre de nœuds : 42      nombre de mailles et types :      26 QUAD4  
26 SEG2

### 3.3 Valeurs testées pour la méthode `PENALISATION, MULT_FRONT`

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,84 | -0,5%        |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

### 3.4 Valeurs testées pour la méthode `PENALISATION, LDLT`

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,83 | -0,5%        |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

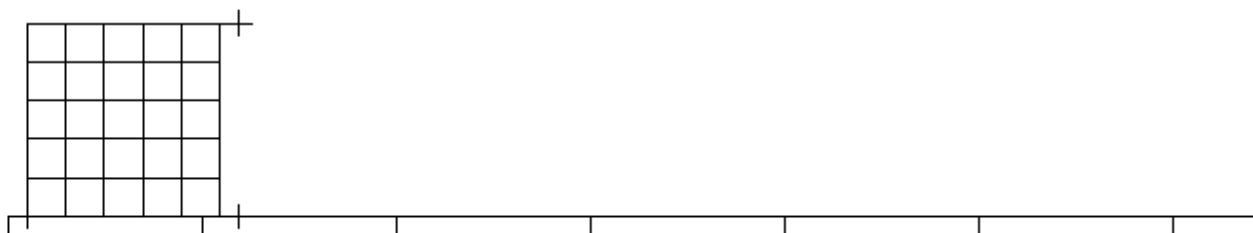
## 4 Modélisation C

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est `D_PLAN`. Le patin et le support sont modélisés par des surfaces maillées en `QUAD4`. Un élément `2D_DIS_T` représente le ressort, sa composante non nulle est dans la direction `x`.

On utilise l'opérateur `DYNA_NON_LINE` pour effectuer le calcul dynamique. Les efforts de contact sont pris en compte par `AFFE_CHAR_MECA / CONTACT`, avec la méthode `CONTINUE`.

### 4.2 Caractéristiques du maillage



Nombre de nœuds : 42      nombre de mailles et types : 26 QUAD4  
26 SEG2

### 4.3 Valeurs testées pour la méthode CONTINUE, MULT\_FRONT

| <i>t</i> | Référence | Aster | % différence |
|----------|-----------|-------|--------------|
| 1,697    | 14,91     | 14,84 | -0,5%        |
| 3,393    | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

### 4.4 Valeurs tests pour la méthode CONTINUE, LDLT

| <i>t</i> | Référence | Aster | % différence |
|----------|-----------|-------|--------------|
| 1,697    | 14,91     | 14,83 | -0,5%        |
| 3,393    | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

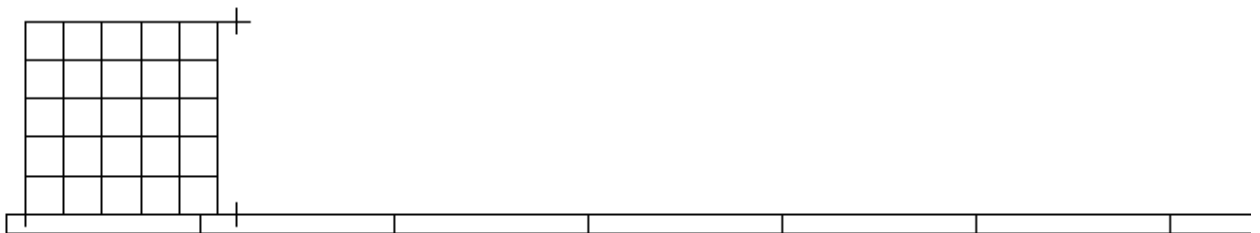
## 5 Modélisation D

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est `D_PLAN`. Le patin et le support sont modélisés par des surfaces maillées en `QUAD8`. Un élément `2D_DIS_T` représente le ressort, sa composante non nulle est dans la direction  $x$ .

On utilise l'opérateur `DYNA_NON_LINE` pour effectuer le calcul dynamique. Les efforts de contact sont pris en compte par `AFFE_CHAR_MECA / CONTACT`, avec la méthode `CONTINUE`.

### 5.2 Caractéristiques du maillage



Nombre de nœuds : 110      nombre de mailles et types :  
26 QUAD 8  
24 SEG3  
2 SEG 2

### 5.3 Valeurs testées pour la méthode LAGRANGIEN, MULT\_FRONT

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,83 | -0,5%        |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

### 5.4 Valeurs testées pour la méthode LAGRANGIEN, LDLT

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,83 | -0,5%        |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

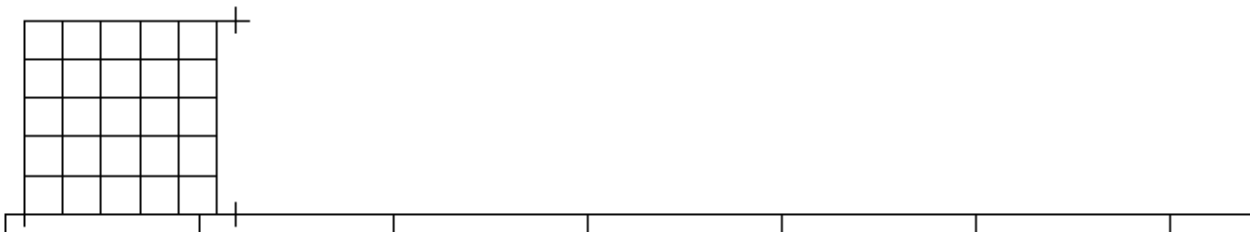
## 6 Modélisation E

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le problème est D\_PLAN. Le patin et le support sont modélisés par des surfaces maillées en QUAD8. Un élément 2D\_DIS\_T représente le ressort, sa composante non nulle est dans la direction x.

On utilise l'opérateur DYNA\_NON\_LINE pour effectuer le calcul dynamique. Les efforts de contact sont pris en compte par AFFE\_CHAR\_MECA / CONTACT, avec la méthode PENALISATION.

### 6.2 Caractéristiques du maillage



Nombre de nœuds : 110      nombre de mailles et types : 26 QUAD 8  
24 SEG3  
2 SEG 2

### 6.3 Valeurs testées pour la méthode PENALISATION, MULT\_FRONT

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,83 | -0,50%       |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |

### 6.4 Valeurs testées pour la méthode PENALISATION, LDLT

| $t$   | Référence | Aster | % différence |
|-------|-----------|-------|--------------|
| 1,697 | 14,91     | 14,83 | -0,50%       |
| 3,393 | 3,50      | 3,62  | 3,6%         |



## 7 Synthèse des résultats

---

Les résultats obtenus sur l'ensemble de ce cas test sont satisfaisants, aussi bien en linéaire qu'en quadratique. Les valeurs obtenues sont à moins de 1% les unes des autres ; et moins de 4% de la solution de référence.

On note que la valeur de référence du deuxième point est plus faible que les deux autres, ce qui augmente artificiellement le pourcentage d'erreur.

Le choix des coefficients de la méthode pénalisée est délicat. Mais on constate qu'une fois les coefficients choisis, le résultat est stable vis à vis du choix des éléments finis et du solveur.