

## SSNL112 - Barre soumise a un chargement thermique cyclique

---

### Résumé :

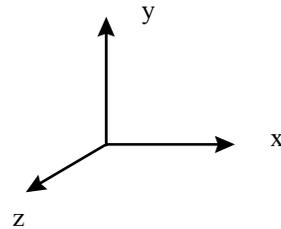
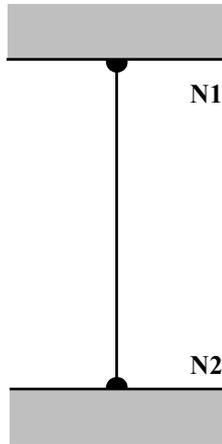
Ce cas test entre dans le cadre de la validation des relations de comportement en élastoplasticité des éléments barre pour la mécanique quasi-statique des structures.

Une barre encastree a ces deux extrémités subit un chargement thermique cyclique induisant des efforts de traction-compression.

Chaque modélisation permet de valider une des relations de comportement non-linéaire introduite : Écrouissage isotrope linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation A), écrouissage cinématique linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation B), ainsi qu'un modèle dit de Pinto-Menegotto, représentant le comportement cyclique des armatures en acier dans le béton armé (modélisations C et D).

## 1 Problème de référence

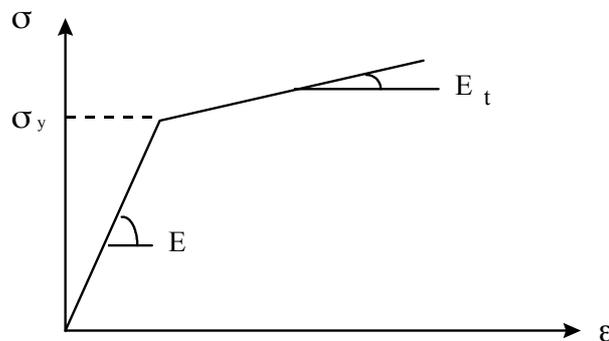
### 1.1 Géométrie



Longueur de la barre : 1 m  
Section de la barre : 5 cm<sup>2</sup>

### 1.2 Propriétés des matériaux

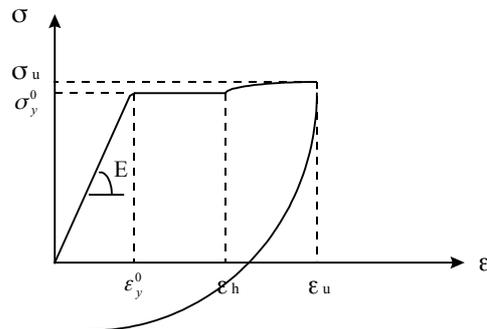
#### 1.2.1 Écrouissages isotrope et cinématique linéaires



Module d'Young :  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$   
Pente d'écrouissage :  $E_t = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$   
Limite d'élasticité :  $\sigma = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$   
Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$   
Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = 1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

Ce test permet de valider le fonctionnement de MFront (comportement plasticité) pour les barres (méthodes de Deborst).

## 1.2.2 Modèle de Pinto-Menegotto



Module d'Young :	$E$	=	$2. 10^{11} Pa$
Limite d'élasticité :	$\sigma_y^0$	=	$2.10^8 Pa$
Coefficient de Poisson :	$\nu$	=	0,3
Coefficient de dilatation thermique :	$\alpha$	=	$1.10^{-5} K^{-1}$
Déformation d'écroissage :	$\epsilon_h$	=	$2.3 10^{-3}$
Contrainte ultime :	$\sigma_u$	=	$2.58 10^8 Pa$
Déformation ultime :	$\epsilon_u$	=	$3.10^{-2}$
Coefficient définissant la courbe $\zeta$ :	$R_0$	=	20
Coefficient définissant la courbe $\zeta$	$A_1$	=	18.5
Coefficient définissant la courbe $\zeta$	$A_2$	=	0.15
Coefficient de flambage :	$C$	=	0.5
Coefficient de flambage :	$A$	=	0.008

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

### Conditions aux limites :

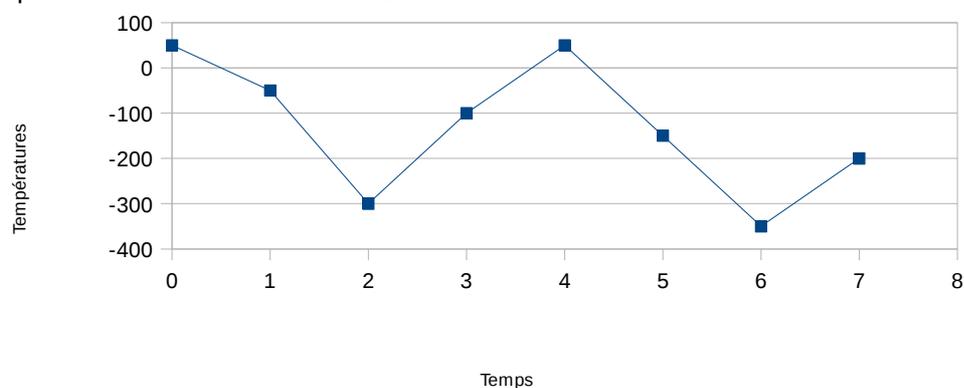
La barre est encastée. Les déplacements sont donc bloqués dans les trois directions.  
En  $N1$  et  $N2$  :  $DX = DY = DZ = 0$

### Chargement :

Le trajet de chargement est décrit par l'évolution de la température, uniforme dans la barre :

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7
$T(^{\circ}C)$	50	-50	-300	-100	50	-150	-350	-200

La température de référence est  $0^{\circ}C$ .



## 2 Solutions de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

#### 2.1.1 Écrouissages linéaires

##### Écrouissage isotrope

Pour une traction uniaxiale, le critère de plasticité s'écrit :

$$|\sigma_L| - R(p) \leq 0$$

où  $p$  est la déformation plastique cumulée

$$R(p) = R' p + \sigma^y \quad \text{et} \quad R' = \frac{E E_1}{E - E_1}$$

Le critère s'écrit alors :

$$|\sigma_L| - R' p - \sigma^y \leq 0$$

Le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\sigma = A \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^p) - 3K\alpha(T - T^{ref}) \mathbf{Id}$$

On en déduit donc l'expression de  $\sigma_L$

$$\sigma_L = E(\varepsilon - \alpha T) - E \varepsilon^p \quad (T^{ref} = 0)$$

Dans notre cas,  $\varepsilon = 0$  donc :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p \quad \text{avec} \quad \varepsilon_L = -\alpha T$$

Donc :

- Si  $|\sigma_L| - R(p) < 0$  :

$$p = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_L = E \varepsilon_L$$

- Si  $|\sigma_L| - R(p) = 0$  :

$$p = \left( \frac{|\sigma_L| - \sigma^y}{R'} \right)$$

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p$$

##### Application au trajet de chargement

###### Instant 1 :

$$\sigma = E \varepsilon = 200 \text{MPa} \quad \text{et} \quad R(p) = R' p + \sigma^y = 100 \text{MPa} \quad \text{car} \quad p = 0.$$

On a bien  $\sigma_L - R(p) \leq 0$ .

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique :  $\sigma_L = 100 \text{MPa}$  et  $N = 100 \text{kN}$

###### Instant 2 :

Le critère est atteint :

$$\sigma_L = \frac{E}{E + R'} (R' \varepsilon_L + \sigma^y) = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^{11} + 2.02 \cdot 10^9} (2.02 \cdot 10^9 \times 3.5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8) = 205 \text{MPa}$$

$$N = 102.5 \text{kN}$$

$$\text{et} \quad p = 2.475 \cdot 10^{-3}$$

**Instant 3 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 \text{ MPa}$$
$$N = -97.5 \text{ kN}$$

**Instant 4 :**

On plastifie à nouveau :

Le critère s'écrit :  $|\sigma| - R' p - \sigma^y = 0$  avec  $p = p_1 + p_2$  où  $p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$ 

On obtient donc :

$$p_2 = \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} - p_1$$
$$\sigma = -E \varepsilon^p = -E (p_1 - p_2)$$
$$\sigma = \left( \frac{R'}{R' + E} \right) \left( -2 E p_1 - \frac{E \sigma^y}{R'} \right) = -207.9 \text{ MPa}$$

Et donc  $N = -103.95 \text{ kN}$ **Instant 5 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 1.0395 \cdot 10^{-3}) = 192.1 \text{ MPa}$$
$$N = 96.05 \text{ kN}$$

**Instants 6 et 7 :**

Le raisonnement est identique

On trouve :

$$N_{(inst.6)} = 105.87 \text{ kN}$$
$$N_{(inst.7)} = -44.13 \text{ kN}$$

**Écrouissage cinématique**

La méthode de calcul est identique, mais dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :

$$\sigma - X_{eq} - \sigma^y \leq 0 \text{ avec } X_{eq} = C (\varepsilon^p)_{eq} = \frac{3}{2} C \varepsilon^p = \frac{E E_t}{E - E_t} \varepsilon^p$$

Avec les notations précédentes, le critère s'écrit :

$$|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y \leq 0 \text{ d'où } \sigma_L = R' \varepsilon^p \pm \sigma^y \text{ (suivant le sens de l'écoulement).}$$

**Application au trajet de chargement****Instant 1 :**Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique :  $\sigma_L = 100 \text{ MPa}$  et  $N = 100 \text{ kN}$ **Instant 2 :**Le critère est atteint :  $|\sigma_L - R' \varepsilon^p| - \sigma^y = 0$ 

$$\sigma_L = R' \varepsilon^p + \sigma^y = 2.02 \cdot 10^9 \times 2.475 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^8 = 205 \text{ MPa}$$

**Instant 3 :**

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (1.5 \cdot 10^{-3} - 2.475 \cdot 10^{-3}) = -195 \text{ MPa}$$
$$N = -97.5 \text{ kN}$$

## Instant 4 :

$$|\sigma - R' \varepsilon^p| - \sigma^y = 0 \quad \text{avec } p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon^p = p_1 - p_2$$

$$p_2 = p_1 - \frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}$$

$$\sigma = -E \varepsilon^p = -E(p_1 - p_2)$$

$$\sigma = -E \left( \frac{|\sigma + \sigma^y|}{R'} \right) = -198 \text{MPa}$$

$$N = -99 \text{kN}$$

## Instant 5 :

On décharge élastiquement :

$$\sigma_L = E \varepsilon_L - E \varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11} (2 \cdot 10^{-3} - 9.9 \cdot 10^{-4}) = 202 \text{MPa}$$

$$N = 101 \text{kN}$$

## Instants 6 et 7 :

Le raisonnement est identique. On trouve :

$$N_{(inst.6)} = 103 \text{kN}$$

$$N_{(inst.7)} = -47 \text{kN}$$

## 2.1.2 Modèle de Pinto-Menegotto

Ce modèle est décrit dans le Manuel de Référence de Code\_Aster [R5.03.09] [bib1]. La loi constitutive des aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique où le trajet entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type  $\sigma = f(\varepsilon)$ .

Comme précédemment les déformations imposées sont des déformations thermiques :  $\varepsilon = -\alpha T$

### 2.1.2.1 Cas sans flambage Premier chargement

- Élasticité linéaire :  $\sigma = E \varepsilon$

#### Instant 1 :

$$N = E \varepsilon S = 2 \cdot 10^{11} \times 1 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-4} = 100 \text{kN}$$

- Palier plastique :  $\sigma = \sigma^y$
- Polynôme de degré 4 :  $\sigma = \sigma_u - (\sigma_{su} - \sigma_y^0) \left( \frac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h} \right)^4$

#### Instant 2 :

$$\varepsilon = 3.5 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_h = 2.3 \cdot 10^{-3}, \text{ on utilise le polynôme de degré 4 :}$$

$$\sigma = 209.416 \text{MPa et } N = 104.708 \text{kN}$$

## Cycles

### Demi-cycle 1 :

On détermine  $\zeta_p^0$  :

$$\zeta_p^0 = \varepsilon_r^0 - \varepsilon_y^0 = 3.5 \cdot 10^{-3} - 1.10 \cdot 10^{-3} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ car } \varepsilon_r^0 = \varepsilon_{(inst.2)}$$

Puis  $\Delta \sigma^0$  :

$$\Delta \sigma^0 = E_h \zeta_p^0 = 2 \cdot 10^9 \times 2.5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ MPa}$$

D'où  $\sigma_y^1 = \sigma_y^0 \cdot \text{sign}(-\zeta_p^0) + \Delta \sigma^0 = -200 + 5 = -195 \text{ MPa}$

On calcule ensuite  $\varepsilon_y^1$  :

$$\varepsilon_y^1 = \varepsilon_r^0 + \frac{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}{E} = 3.5 \cdot 10^{-3} + \frac{(-195 - 209.416) 10^6}{2.0 \cdot 10^{11}} = 1.477 \cdot 10^{-3}$$

On détermine ainsi  $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$ , définie par :

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left( \frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}} \right) \varepsilon^* \quad , \text{ avec } b = \frac{E_h}{E}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r^0}{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}$$

$$\xi_p^0 = \frac{\zeta_p^0}{|\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0|} \quad \text{et} \quad R^I = R_0 - \frac{A_1 \cdot \xi_p^0}{A_2 + \xi_p^0}$$

On obtient  $\xi_p^0 = -1.23$  et  $R^I = 3.51$

On peut alors calculer la valeur de  $\sigma$  aux instants 3 et 4 :

**Instant 3 :**

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_{(inst.3)} - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0} = \frac{1.5 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}}{1.477 \cdot 10^{-3} - 3.5 \cdot 10^{-3}} = 0.988$$

$$\sigma^* = b \varepsilon^* + \left( \frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}} \right) \varepsilon^* = 0.01 \times 0.988 + \left( \frac{1-0.01}{(1+(0.988)^{3.51})^{(1/3.51)}} \right) = 0.82$$

et  $\sigma = \sigma^* (\sigma_y^1 - \sigma_r^0) + \sigma_r^0 = 0.82 \times (-195 - 209.416) + 209.416 = -122 \text{ MPa}$

d'où  $N = -61 \text{ kN}$

**Instant 4 :**

On utilise la même méthode, avec  $\varepsilon = 0$ .

$$\varepsilon^* = 1.73$$

$$\sigma^* = 0.56$$

$$\sigma = -20 \text{ MPa}$$

$$N = -10 \text{ kN}$$

**Demi-cycle 2 : Instant 5 et 6 :**

La méthode de calcul est identique, on détermine :

$$\zeta_p^1, \sigma_y^2, \varepsilon_y^2, \xi_p^1, R^2, \text{ puis } \sigma_{(inst.5)}^* = f(\varepsilon_{(inst.5)}^*) \text{ et } \sigma_{(inst.6)}^* = f(\varepsilon_{(inst.6)}^*)$$

et finalement  $\sigma_{(inst.5)}$  et  $\sigma_{(inst.6)}$ .

**Demi-cycle 3 : Instant 7 : Idem**

## 2.1.2.2 Cas avec flambage

### Premier chargement

Identique au cas précédent.

### Cycles

#### Demi-cycle 1 (compression) :

La méthode de calcul est identique, mais la valeur de la pente de l'asymptote est modifiée :

On calcule un nouveau coefficient  $b_c$  :

$$b_c = a(5.0 - L/D) e \left( b \xi' \frac{E}{\sigma^y - \sigma^\infty} \right) = 0.006 \times (5.0 - 5.9) e^{(0.01 \times 1.477 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8 - 1.36 \cdot 10^8})} = -0.0057$$

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer  $\sigma_y^n$ . Le raisonnement est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire  $\sigma_s^*$  afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} = 0.028 \times 0.01 \times 2 \cdot 10^{11} \times \frac{0.01 + 0.0057}{1 + 0.0057} = 0.87 \text{ MPa}$$

$$\text{où } \gamma_s \text{ est donné par : } \gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10(e^{c(L/D)} - 1.0)} = 0.028$$

#### Demi-cycle 2 (traction) :

- En traction, on adopte un module d'Young réduit :

$$E_r = E \left( a_5 + (1.0 - a_5) e^{-a_6 \xi^{n_2}} \right) = 2 \cdot 10^{11} \times (0.88 + (1 - 0.88) e^{(-620 \times 1.473 \cdot 10^{-6})}) = 1.99 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$$

avec  $a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5 = 0.88$

Le reste de la méthode est identique.

## 2.2 Résultats de référence

Effort normal  $N$  constant sur la barre

## 2.3 Incertitude sur la solution

Aucune, la solution est analytique

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] Manuel de référence du Code\_Aster [R5.03.09].
- [2] S. ANDRIEUX : TD 1 Trois barres thermoélastoplastiques Von Mises parfait. In « Initiation à la thermoplasticité dans le Code\_Aster », HI-74/96/013 novembre 1996 (manuel de référence du cours).

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage isotrope linéaire - Critère de Von Mises

### 3.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart ( % )
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	-9.7500E+04	0
effort normal N	4	-1.0395E+05	0
effort normal N	5	9.6050E+04	0
effort normal N	6	1.0587E+05	0
effort normal N	7	-4.4129E+04	0

## 4 Modélisation B

---

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire - Critère de Von Mises

### 4.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart ( % )
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	-9.7500E+04	0
effort normal N	4	-9.9000E+04	0
effort normal N	5	1.0100E+05	0
effort normal N	6	1.0300E+05	0
effort normal N	7	-4.7000E+04	0

## 5 Modélisation C

---

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto sans flambage (valeur de ELAN inférieure à 5).

### 5.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart ( % )
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	-6.0777E+04	0
effort normal N	4	-9.1430E+04	0
effort normal N	5	7.6082E+04	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	-3.7965E+04	0

## 6 Modélisation D

---

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'1 élément de barre (BARRE).

Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto avec flambage (valeur de ELAN supérieure à 5).

### 6.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.

1 maille SEG2

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart ( % )
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	-6.0556E+04	0
effort normal N	4	-8.9078E+05	0
effort normal N	5	7.6905E+05	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	-3.8119E+04	0

## 7 Synthèse des résultats

---

Les résultats calculés par Code\_Aster sont en excellent accord avec les solutions analytiques.