

## SSNP14 - Plaque en traction-cisaillement - Von Mises (écrouissage cinématique)

---

### Résumé :

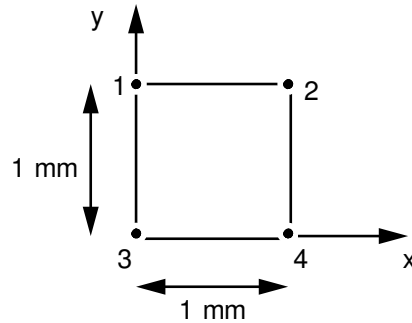
Ce test 2D contraintes planes quasi-statique, issu du guide VPCS, entre dans le cadre de la validation des relations de comportement élasto-plastique. Un élément de volume, constitué d'un matériau plastique à écrouissage cinématique linéaire, est soumis à la fois à un effort de traction et de cisaillement.

L'intérêt principal de ce test réside dans le caractère non radial du chargement.

## 1 Problème de référence

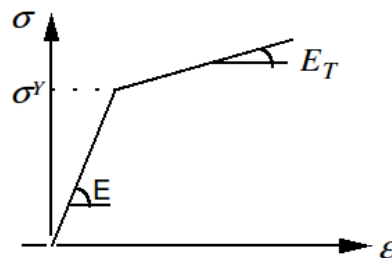
### 1.1 Géométrie

Les contraintes et déformations sont homogènes dans l'élément de volume. Celui-ci peut être représenté par un élément plan ou volumique, par exemple :



### 1.2 Propriétés de matériaux

Loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire.



$$E = 195000 \text{ MPa}$$

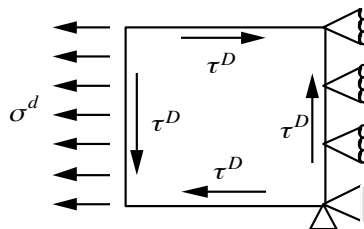
$$\nu = 0.3$$

$$\sigma^y = 181 \text{ MPa}$$

$$E_T = 1930 \text{ MPa}$$

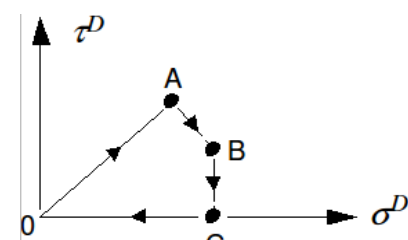
### 1.3 Conditions aux limites et chargements

L'élément de volume est bloqué suivant  $Ox$  le long du côté  $[2,4]$  tout en étant soumis à une traction  $\sigma^D$  et un effort de cisaillement  $\tau^D$ .



Le trajet de chargement est le suivant :

	$\sigma^D$	$\tau^D$
	( MPa )	( MPa )
A	151,2	93,1
B	257,3	33,1
C	259,3	0



## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La contrainte est fixée par le trajet de chargement (pilotage en contrainte), soit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^D & \tau^D & 0 \\ \tau^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit la part élastique de la déformation :

$$\varepsilon^e = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma^D & (1+\nu)\tau^D & 0 \\ (1+\nu)\tau^D & -\nu\sigma^D & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma^D \end{bmatrix}$$

Si l'on suppose maintenant que l'on connaît la déformation totale  $\varepsilon$ , alors on peut en déduire la déformation plastique :  $\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e$

Remarque :

$$\left| \varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{zz}^p = 0 \text{ et } \varepsilon_{yy}^p = \varepsilon_{zz}^p \text{ donc } \varepsilon_{yy}^p = \varepsilon_{zz}^p = \frac{-\varepsilon_{xx}^p}{2} \right.$$

puis la contrainte de rappel :

$$\chi = C \varepsilon^p \text{ avec } \frac{2}{3C} = \frac{1}{E^T} - \frac{1}{E} \text{ avec } C : \text{ constante de Prager}$$

De plus, pour obtenir une précision correcte, il faut utiliser un nombre d'incrémentes assez important pour le trajet  $AB$ , en l'occurrence, au moins 30 dans le cas présent. De même pour le trajet  $BC$ .

### 2.2 Résultats de référence

La donnée de la déformation totale  $\varepsilon$  est nécessaire pour les calculs précédents. Elle est obtenue comme moyenne des résultats de plusieurs codes.

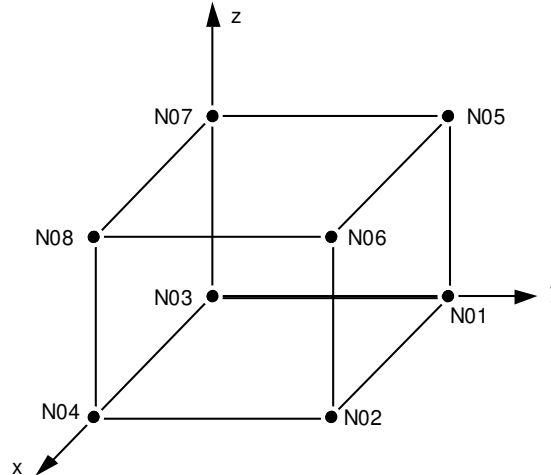
### 2.3 Références bibliographiques

[1] Guide de Validation des Progiciels de Calcul de Structures - SFM. Afnor technique

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D.



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau) ( 1,5,6,2 )  
, ( 1,5,7,3 ) , ( 3,4,8,7 ) et ( 4,8,6,2 ) .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8  
Nombre de mailles et types : 1 HEXA8 + 4 QUAD4 (faces)

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$X_{xx} = \sqrt{1}$	A	NON_REGRESSION	18.26
$X_{xy} = \sqrt{4}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.066 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.978 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4103 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.8913 E-2

Indicateurs de décharge en un point de Gauss (DERA\_ELGA), et au nœud  $N_2$  (DERA\_ELNO).

Identification	Type de référence	Valeur de référence
DCHA_V à l'instant 0.1	'NON_REGRESSION'	0.877871
RADI_V à l'instant 1,5	'NON_REGRESSION'	0
ERR_RADI à l'instant 1,5	'NON_REGRESSION'	0,0125766

De plus, dans une seconde série de calculs, on teste l'indicateur d'erreur due à la non radialité du chargement : à partir d'une discrétisation temporelle grossière (2 incréments sur les trajets  $AB$  et  $BC$ , et un incrément sur les autres), on active la subdivision du pas de temps si l'erreur due à la non radialité dépasse 2% ( $RESI\_RADI\_RELA=0.02$ ). Ce test est effectué pour 3 comportements équivalents :  $VMIS\_CINE\_LINE$ ,  $VMIS\_ECMI\_LINE$ ,  $VMIS\_CIN2\_CHAB$ .

Les résultats sont :

$VMIS\_CINE\_LINE$  et  $VMIS\_ECMI\_LINE$

Identification	Instants	Type de Référence	Référence	Tolérance
$\epsilon_{xx}$	$A$	AUTRE_ASTER	1.48297 E-2	0,10%
$\epsilon_{xy}$	$A$	AUTRE_ASTER	1.36014 E-2	0,10%
$X_{xx} = V1$	$A$	AUTRE_ASTER	18.26	0,10%
$X_{xy} = V4$	$A$	AUTRE_ASTER	1.68688 E+1	0,10%
$\epsilon_{xx}$	$B$	AUTRE_ASTER	4.066 E-2	0,10%
$\epsilon_{xy}$	$B$	AUTRE_ASTER	1.978 E-2	0,10%
$\epsilon_{xx}$	$C$	AUTRE_ASTER	4.4103 E-2	0,10%
$\epsilon_{xy}$	$C$	AUTRE_ASTER	1.8913 E-2	0,10%

$VMIS\_CIN1\_CHAB$

Identification	Instants	Type de Référence	Référence	Tolérance
$\epsilon_{xx}$	$A$	AUTRE_ASTER	1.48297 E-2	1,00%
$\epsilon_{xy}$	$A$	AUTRE_ASTER	1.36014 E-2	1,00%
$X_{xx} = V1$	$A$	AUTRE_ASTER	18.26	1,00%
$X_{xy} = V4$	$A$	AUTRE_ASTER	1.68688 E+1	1,00%
$\epsilon_{xx}$	$B$	AUTRE_ASTER	4.066 E-2	1,00%
$\epsilon_{xy}$	$B$	AUTRE_ASTER	1.978 E-2	1,00%
$\epsilon_{xx}$	$C$	AUTRE_ASTER	4.4103 E-2	1,00%
$\epsilon_{xy}$	$C$	AUTRE_ASTER	1.8913 E-2	1,00%

Pour les trois comportements, l'indicateur d'erreur en radialité fournit le même résultat :

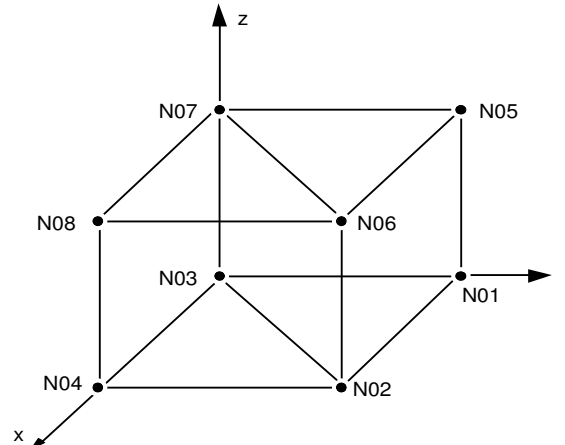
Identification	Type de référence	Valeur de référence
ERR_RADI à l'instant 1,5	'NON_REGRESSION'	0.011798
ERR_RADI à l'instant 2,5	'NON_REGRESSION'	0.01956

L'utilisation du critère de radialité pour raffiner automatiquement le pas de temps conduit à 56 pas de temps au total, contre 64 dans le premier cas (avec 30 incréments sur  $AB$  et  $BC$ ), pour un résultat de qualité équivalente (erreur de 1,2% environ à  $t=1.5$ , et 2% à  $t=2.5$ ).

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau)  
( 1,5,6,2) , ( 1, 5, 7,3) , ( 3,4,8,7) et ( 4,8,6,2) .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 PENTA6 + 4 QUAD4 (faces)

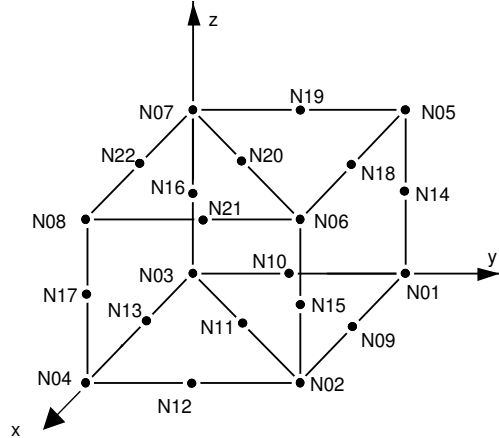
### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$\chi_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$\chi_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\chi_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\epsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\epsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N15, DX: 0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N21, DX: 0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N17, DX: 0.)
- DDL\_IMPO: (NOEUD: N12, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau)  
( 1, 14, 5, 18, 6, 15, 2, 9), ( 1, 14, 5, 19, 7, 16, 3, 10), ( 3, 13, 4, 17, 8, 22, 7, 16) et  
( 4, 17, 8, 21, 6, 15, 2, 12).

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22

Nombre de mailles et types : 1 PENTA15 + 4 QUAD8 (faces)

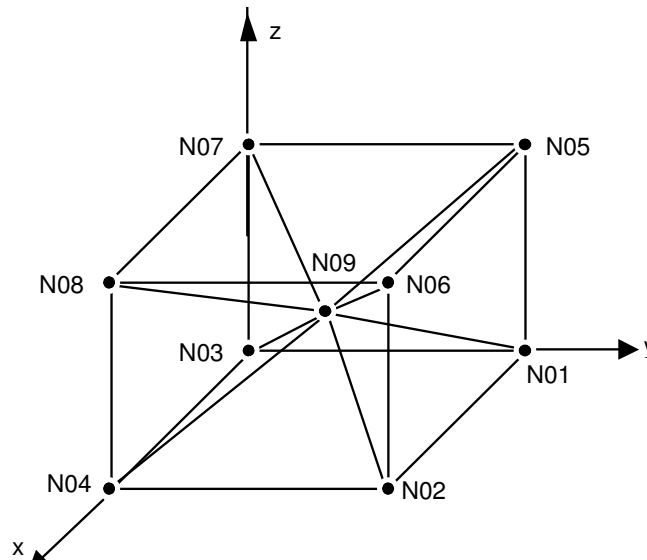
### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\varepsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\varepsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$X_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$X_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$X_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\varepsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\varepsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\varepsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\varepsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\varepsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\varepsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau)  
( 1,5,6,2 ), ( 1,5,7,3 ), ( 3,4,8,7 ) et ( 4,8,6,2 ).

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 9

Nombre de mailles et types : 6 PYRAM5 et 4 QUAD4 (faces)

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$\chi_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$\chi_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\chi_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\epsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\epsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

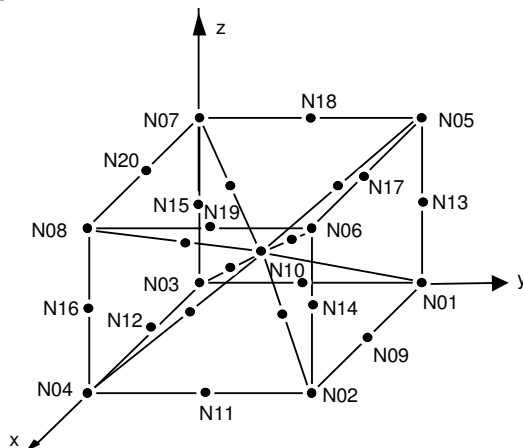




## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N11, DX: 0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N14, DX: 0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N16, DX: 0.)  
   DDL\_IMPO: (NOEUD: N19, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau)  
   ( 1, 13, 5, 17, 6, 14, 2, 9 ),   ( 1, 13, 5, 18, 7, 15, 3, 10 ),   ( 3, 12, 4, 16, 8, 10, 7, 15 )   et  
   ( 4, 16, 8, 19, 6, 14, 2, 11 ) .

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 29

Nombre de mailles et types : 6 PYRAM13 et 4 QUAD8 (faces)

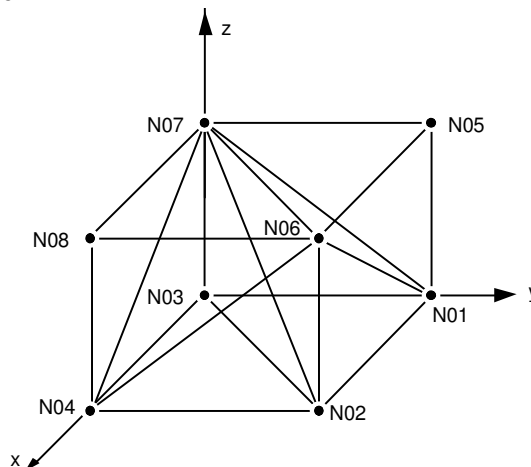
### 7.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$\chi_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$\chi_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\chi_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\epsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\epsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)

- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau) ( 1,5,6 ), ( 1,2,6 ), ( 1,5,7 ), ( 1,3,7 ), ( 3,4,7 ), ( 4,7,8 ), ( 2,4,6 ) et ( 4,6,8 ).

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 6 TETRA4 et 8 TRIA3 (faces)

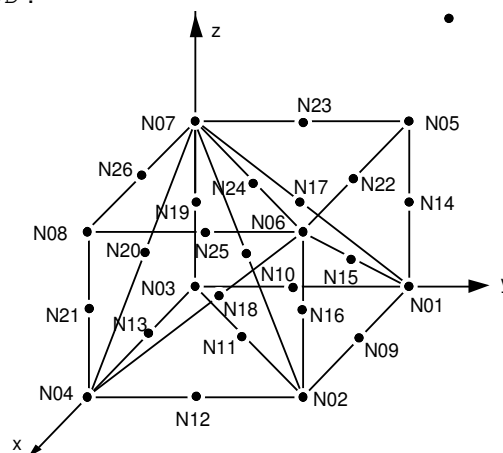
## 8.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$\chi_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$\chi_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\chi_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\epsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\epsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation utilisée est 3D .



Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO: (NOEUD: N04, DX: 0., DY:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N08, DX: 0., DY:0., DZ:0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N02, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N06, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N12, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N16, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N18, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N21, DX: 0.)  
DDL\_IMPO: (NOEUD: N25, DX: 0.)
- des forces surfaciques imposées (mot clé FORCE\_FACE) sur les faces (mailles de peau)  
( 1,14,5,22,6,15), ( 1,9,2,16,6,15), ( 1,14,5,23,7,17), ( 1,10,3,19,7,17),  
( 3,13,4,20,7,19), ( 4,20,7,26,8,21), ( 2,12,4,18,6,16) et ( 4,18,6,25,8,21).

## 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 26

Nombre de mailles et types : 6 TETRA10 et 8 TRIA6 (faces)

## 9.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Type de Référence	Référence
$\sigma_{xx}$	A	NON_REGRESSION	151.2
$\sigma_{xy}$	A	NON_REGRESSION	93.1
$\epsilon_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.48297 E-2
$\epsilon_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.36014 E-2
$\chi_{xx}$	A	NON_REGRESSION	1.82640 E+1
$\chi_{xy}$	A	NON_REGRESSION	1.68688 E+1
$\chi_{yy}$	A	NON_REGRESSION	-0.91320 E+1
$\epsilon_{xx}$	B	NON_REGRESSION	4.0444 E-2
$\epsilon_{xy}$	B	NON_REGRESSION	1.9917 E-2
$\epsilon_{xx}$	C	NON_REGRESSION	4.4177 E-2
$\epsilon_{xy}$	C	NON_REGRESSION	1.9205 E-2
$\epsilon_{xx}$	O	NON_REGRESSION	4.2848 E-2
$\epsilon_{xy}$	O	NON_REGRESSION	1.9203 E-2

## 10 Synthèse des résultats

Les résultats sont identiques quel que soit le type d'élément choisi. Les résultats sont proches de la solution de référence puisque les écarts sont globalement inférieurs à 1.52%.