

## SSNP176 – Modélisations de type D\_PLAN\_INCO\_\* en élasticité quasi-incompressible

---

### Résumé :

L'objectif de ce test est d'apporter une vérification supplémentaire des modélisations de type D\_PLAN\_INCO\_\* sur un modèle dont on connaît la solution analytique.

Il est constitué de deux modélisations :

- Modélisation A : test sur la modélisation D\_PLAN\_INCO\_UPO (donc sur des éléments linéaires)
- Modélisation B : test sur les modélisations D\_PLAN\_INCO\_UP et D\_PLAN\_INCO\_UPG (sur des éléments quadratiques)

## 1 Problème de référence

Le problème de référence est inspiré d'un article de F. Auricchio *et al.* [1] qui en propose une solution analytique.

### 1.1 Géométrie

On considère un carré de dimension  $2m \times 2m$ .

La géométrie peut être visualisée sur la figure 1.1-1, avec le maillage qui sera utilisé pour les deux modélisations A et B.

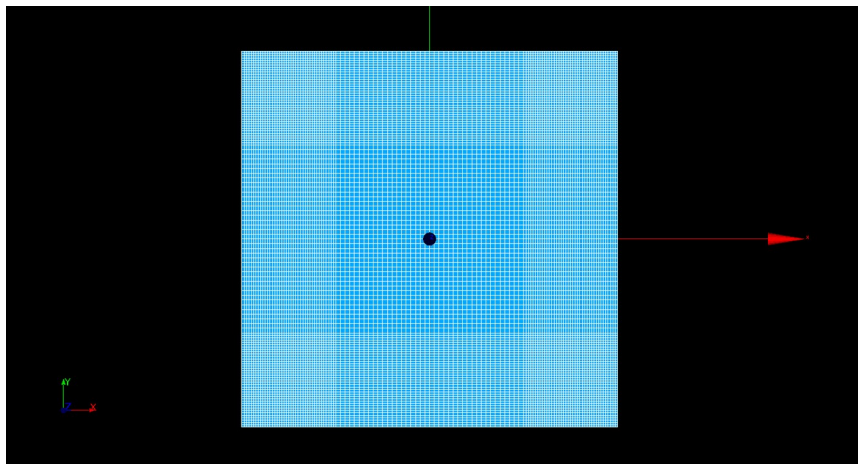


Figure 1.1-1: Géométrie et maillage

### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique quasi-incompressible, c'est-à-dire que son coefficient de Poisson tend vers 0.5 :

- Module d'élasticité :  $E = 120 Pa$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.499999$

Ces valeurs peuvent paraître surprenantes mais n'ont pas de signification physique puisque le test est purement mathématique.

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

On encastre les quatre bords du carré ( $DX = DY = 0$ ), et on applique une force volumique sur l'ensemble du carré. Cette force est variable dans l'espace et a pour composantes :

$$FX = \mu y \left( \frac{-3}{2} x^4 + 6x^2 - 3x^2 y^2 + y^2 - \frac{5}{2} \right) - 15x^2(y-1)$$

$$FY = \mu x \left( \frac{3}{2} y^4 - 6y^2 + 3y^2 x^2 - x^2 + \frac{5}{2} \right) - 3y^2 - 5x^3$$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

Les résultats de référence sont soit des valeurs de non-regression, soit les solutions analytiques en déplacement et en pression, données par les formules suivantes [1] :

$$U_1 = \frac{(x^2-1)^2(y^2-1)y}{4} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{(y^2-1)^2(1-x^2)x}{4}$$

$$P = 5x^3(y-1) + y^3$$

### 2.2 Grandeurs et résultats de référence

La solution analytique donne :

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	Valeur
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	t = 1 s	DX	-0.052734375 mm
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	t = 1 s	DY	0.052734375 mm
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	t = 1 s	PRES	-0.1875 Pa

### 2.3 Incertitudes sur la solution

Cette solution de référence analytique est exacte.

### 2.4 Référence bibliographique

- [1] *An analysis of some mixed-enhanced finite element for plane linear elasticity*, F. Auricchio, L. Beirao da Veiga, C. Lovadina, A. Reali. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005) 2947- 2968

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D\_PLAN\_INCO\_UPO.

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD4 (quadrangle linéaire), avec un total de 15360 éléments.

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution de référence analytique présentée en 2, et également en non-regression. La pression n'est pas testée car ce degré de liberté n'est pas porté par les éléments d'une modélisation \*\_INCO\_UPO.

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud pt_B en (0.5, 0.5)	$t=1\text{ s}$	DX	$-0.052734375\text{ mm}$	1.0E-6
Nœud pt_B en (0.5, 0.5)	$t=1\text{ s}$	DY	$0.052734375\text{ mm}$	1.0E-6

Identification	Type de référence
Nœud pt_B - DEPL/DX	NON_REGRESSION
Nœud pt_B - DEPL/DY	NON_REGRESSION

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise deux modélisations différentes D\_PLAN\_INCO\_UP et D\_PLAN\_INCO\_UPG .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD8 (quadrangle quadratique), avec un total de 15360 éléments.

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution de référence analytique présentée en 2, et également en non-regression :

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	$t = 1\text{ s}$	DX	$-0.052734375\text{ mm}$	1.0E-6
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	$t = 1\text{ s}$	DY	$0.052734375\text{ mm}$	1.0E-6
Nœud pt_B en (0.5,0.5)	$t = 1\text{ s}$	PRES	$-0.1875\text{ Pa}$	1.0E-6

Identification	Type de référence
Nœud pt_B – DEPL/DX	NON_REGRESSION
Nœud pt_B – DEPL/DY	NON_REGRESSION
Nœud pt_B – DEPL/P	NON_REGRESSION

## 5 Synthèse des résultats

---

Le modèle numérique permet de retrouver les résultats du problème de référence analytique avec une précision inférieure à  $1.0E-6$ , quel que soit le type de modélisation utilisée D\_PLAN\_INCO\_UP O, D\_PLAN\_INCO\_UP ou D\_PLAN\_INCO\_UP G.

On retiendra que ce cas test est intéressant car les problèmes incompressibles présentant une solution analytique sont rares.