

## SSNV168 – Essai triaxial drainé avec un comportement DRUCK\_PRAGER adoucissant

---

### Résumé :

Ce cas test permet de simuler un essai triaxial drainé sur quatre modélisations différentes lors d'un calcul non linéaire. Cela permet de mettre en avant l'effet du type d'érouissage négatif, parabolique ou linéaire, dans le cas de modèle `AXIS` ou `3D`.

#### Modélisation A :

- modèle de type « `DRUCK_PRAGER` » à érouissage négatif linéaire pour un confinement de  $2\text{ MPa}$  .
- modèle `AXIS` avec des mailles `QUAD4` .

#### Modélisation B :

- modèle de type « `DRUCK_PRAGER` » à érouissage négatif parabolique pour un confinement de  $2\text{ MPa}$  .
- modélisation `AXIS` avec des mailles `QUAD4` .

#### Modélisation C :

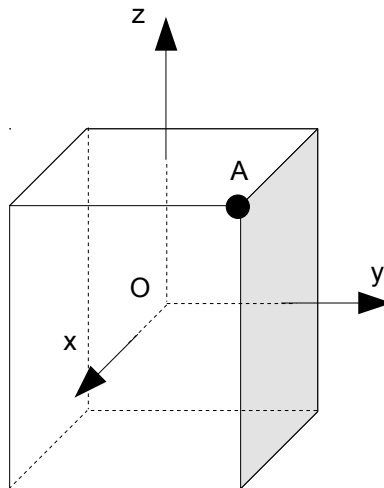
- modèle de type « `DRUCK_PRAGER` » à érouissage négatif linéaire pour un confinement de  $2\text{ MPa}$  .
- modélisation `3D` avec des mailles `HEXA20` .

#### Modélisation D :

- modèle de type « `DRUCK_PRAGER` » à érouissage négatif parabolique pour un confinement de  $2\text{ MPa}$  .
- modélisation `3D` avec des mailles `HEXA20` .

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



- Dimension du cube :  $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$ .
- Centre du cube :  $O : (0., 0., 0.)$

### 1.2 Propriétés du matériau

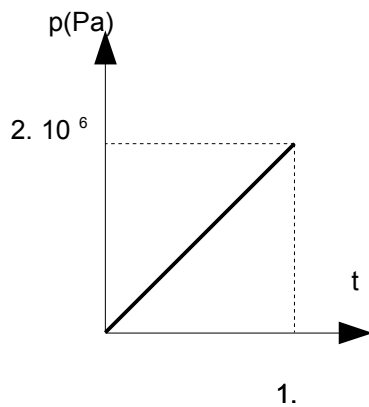
- Élastique
  - $E = 5800.0 \text{ E6 Pa}$  Module d'Young
  - $\nu = 0.3$  Coefficient de Poisson
- DRUCK\_PRAGER avec écrouissage négatif linéaire
  - $\alpha = 0.33$  Coefficient de dépendance en pression
  - $p_{ultm} = 0.01$  Déformation plastique cumulée ultime
  - $\sigma^Y = 2.57 \text{ E6 Pa}$  Contrainte plastique
  - $h = -2.00 \text{ E8 Pa}$  Module d'écrouissage
- DRUCK\_PRAGER avec écrouissage négatif parabolique
  - $\alpha = 0.33$  Coefficient de dépendance en pression
  - $p_{ultm} = 0.01$  Déformation plastique cumulée ultime
  - $\sigma^Y = 2.57 \text{ E6 Pa}$  Contrainte plastique
  - $\sigma_{ultm}^Y = 0.57 \text{ E6 Pa}$  Contrainte ultime

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites et les chargements appliqués sont les suivants :

- Étape A :  $t \in [0, 1.]$

On applique progressivement une compression  $p = 2.10^6 \text{ Pa}$  sur 3 faces du cube (haut, devant, droite) suivant la fonction présentée sur la figure ci-dessous, et des conditions de symétrie sur les 3 autres faces (bas, derrière, gauche).

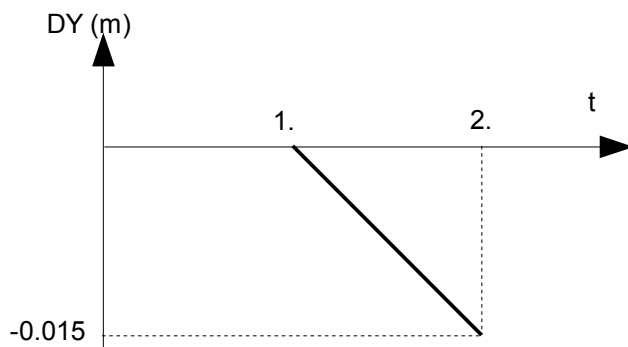


- Étape B:  $t \in ]1, 2.]$

A partir de l'état de contrainte à l'instant  $t = 1.s$ , on applique sur les faces du cube les conditions suivantes:

**Déplacements imposés :**

- le déplacement varie progressivement sur la face de droite suivant la fonction présentée sur la figure ci-dessous:



- Des conditions de symétrie sur les 3 faces (bas, derrière, gauche).

**Chargements imposés:**

On applique une pression de  $p = 2.10^6 Pa$  sur les 2 autres faces (devant et haut).

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

#### 2.1.1 Déplacement $DY$

Le déplacement  $DY$  de référence au point  $A$ , correspond au déplacement imposé.

$$DY = -0.015(t-1)$$

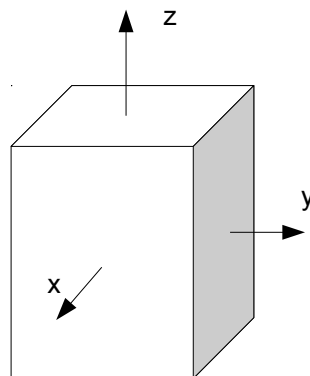
#### 2.1.2 Contrainte $SIXX$

La contrainte  $SIXX$  correspond au chargement appliqué.

#### 2.1.3 Contrainte $SIYY$ et déformation plastique cumulée $VI$

Calcul triaxial en conditions drainées avec la loi de DRUCK\_PRAGER .

Comparaison avec une solution analytique



$$\sigma_{eq} + \alpha I_1 - R(p) = 0$$

$$\sigma_{eq} + \alpha I_1 - \sigma^Y = 0 \text{ au sommet} \quad (1)$$

On impose  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -2 \text{ MPa} = \sigma^0$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{II}$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \frac{1}{3} tr \sigma \\ \sigma_{yy} - \frac{1}{3} tr \sigma \\ \sigma_{zz} - \frac{1}{3} tr \sigma \end{pmatrix} \text{ avec } tr \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{yy} + 2 \sigma^0$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma^0 - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{2}{3}\sigma^0 \\ \sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{2}{3}\sigma^0 \\ \sigma^0 - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{2}{3}\sigma^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sigma_{yy} + \sigma^0 \\ 2\sigma_{yy} - 2\sigma^0 \\ -\sigma_{yy} + \sigma^0 \end{pmatrix}$$

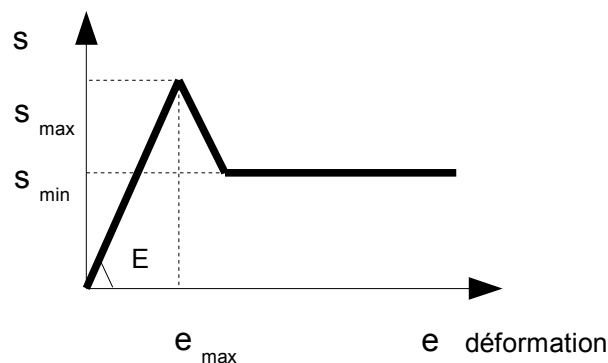
$$S_{II} = S \cdot S = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_{yy} - \sigma^0)^2 + (2\sigma_{yy} - 2\sigma^0)^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right) S_{II}}$$

ce qui nous donne  $\sigma_{eq} = |(\sigma_{yy} - \sigma^0)|$  (2)

En introduisant (2) dans (1) on obtient

$$|(\sigma_{yy} - \sigma^0)| + \alpha(\sigma_{yy} + 2\sigma^0) - \sigma^Y = 0$$



$$\epsilon_{max} \Rightarrow \epsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{E} > 0 \Rightarrow \sigma_{xx} > \sigma_{yy} \\ \Rightarrow \sigma_{yy} < \sigma^0$$

$$\text{d'où (2)} \Rightarrow (-\sigma_{yy} + \sigma^0) + \alpha(\sigma_{yy} + 2 \cdot \sigma^0) - \sigma^Y = 0$$

$$\sigma_{max} \Rightarrow \sigma_{yy}^{max} = \frac{\sigma^Y - \sigma^0(2\alpha + 1)}{\alpha - 1}$$

d'où  $\epsilon_{yy}^{max} = \frac{\sigma^0 - \sigma_{yy}^{max}}{E}$ , on remplace  $\sigma_{yy}^{max}$  par sa valeur et on obtient

$$\epsilon_{max}^{yy} = \frac{3\alpha\sigma^0 - \sigma^Y}{E(\alpha - 1)}$$

$$\sigma_{min} \Rightarrow \sigma_{eq} + \alpha I_1 - R(p_{ult}) = 0$$

$$\sigma_{yy}(\alpha - 1) + \sigma^0(2\alpha + 1) - R(p_{ult}) = 0$$

$$\sigma_{yy}^{min} = \frac{R(p_{ult}) - \sigma^0(2\alpha + 1)}{\alpha - 1} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \epsilon - \epsilon^p = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \sigma) \cdot I \\ \sigma_{eq} + \alpha I_1 - R(p) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \left( \frac{3}{2} \frac{S}{\sigma_{eq}} + \alpha I \right) \text{ avec } \lambda = \dot{p}$$

$$\text{or } S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sigma^0 - \sigma_{yy} \\ 2\sigma_{yy} - 2\sigma^0 \\ \sigma^0 - \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad \sigma_{eq} = |\sigma_{yy} - \sigma^0| = \sigma^0 - \sigma_{yy}$$

$$\text{d'où } \frac{S}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\epsilon}_x^p = \dot{\epsilon}_z^p = \dot{p} \left( \frac{3}{2} \frac{1}{3} + \alpha \right) = \dot{p} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$\dot{\epsilon}_y^p = \dot{p} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{-2}{3} \right) + \alpha \right) = \dot{p}(\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow \epsilon_y^p = p(\alpha - 1) + cste$$

$$\epsilon_y - \epsilon_y^p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + 2\sigma^0)$$

$$\epsilon_y^{max} - cste = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy}^{max} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy}^{max} + 2\sigma^0) = \frac{\sigma_{yy}^{max}}{E} - \frac{2\nu}{E} \sigma^0$$

$$\frac{3\alpha\sigma^0 - \sigma^Y}{E(\alpha-1)} - cste = \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma^Y - \sigma^0(2\alpha+1)}{\alpha-1} \right) - \frac{2\nu}{E} \sigma^0$$

$$cste = \frac{\sigma^0[(5-2\nu)\alpha + (1+2\nu)] - 2\sigma^Y}{E(\alpha-1)} \quad (4)$$

et

$$\epsilon_y^p = p(\alpha-1) + cste$$

d'où

$$\epsilon_y - \epsilon_y^p = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + 2\sigma^0)$$

$$\epsilon_y - p(\alpha-1) - cste = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{2\nu}{E} \sigma^0 \quad (5)$$

L'expression ci-dessous est une application directe de l'expression (5)

$$\epsilon_y^{min} = p_{ultm}(\alpha-1) + cste + \frac{\sigma_{yy}^{min}}{E} - 2\frac{\nu}{E} \sigma^0 \quad (6)$$

En introduisant les expressions (3) et (4) dans (6) on obtient :

$$\epsilon_y^{min} = p_{ultm} \left[ \frac{E(\alpha-1)^2 + h}{E(\alpha-1)} \right] + \frac{\sigma^Y}{E(1-\alpha)} + \sigma^0 \left[ \frac{3\alpha + 4\nu(1-\alpha)}{E(\alpha-1)} \right]$$

L'expression ci-dessous est une application directe de l'expression (5)

$$p = \frac{-\sigma_{yy}}{E(\alpha-1)} + \frac{2\nu\sigma^0}{E(\alpha-1)} + \frac{\epsilon_y}{(\alpha-1)} - \frac{cste}{(\alpha-1)} \quad (7)$$

Pour des raisons de simplification on pose

$$p = A\sigma_{yy} + B$$

avec

$$\begin{cases} A = \frac{1}{E(1-\alpha)} \\ B = \frac{2\nu\sigma^0}{E(\alpha-1)} + \frac{\epsilon_y}{\alpha-1} - \frac{cste}{\alpha-1} \end{cases}$$

en partant de l'équation  $\sigma_{eq} + \alpha I_1 - R(p) = 0$

avec dans le cas :

- linéaire  $R(p) = hp + \sigma^Y$
- parabolique  $R(p) = \frac{6c f(p) \cos(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$

$$\text{avec } f(p) = \begin{cases} \left( 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \frac{p}{p_{ultm}} \right)^2 \right) & 0 < p < p_{ultm} \\ \frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y} & p_{ultm} < p \end{cases} \text{ si}$$

### Cas linéaire

$$\sigma_{eq} + \alpha I_1 - R(p) = 0 \quad \text{cas où } 0 < p < p_{ultm}$$

$$\sigma_{yy}(\alpha - 1) + \sigma^0(2\alpha + 1) - hp - \sigma^Y = 0 \quad (8)$$

En introduisant l'expression de p (7) dans (8) on obtient l'expression suivante

$$\sigma_{yy} = \epsilon_y \left( \frac{Eh}{h + E(\alpha - 1)^2} \right) + \sigma^Y \left( \frac{E(\alpha - 1)}{h + E(\alpha - 1)^2} \right) + \sigma^0 \left( \frac{2\sqrt{h} - (2\alpha + 1)E(\alpha - 1)}{h + E(\alpha - 1)^2} \right) + \frac{hE.cste}{h + E(\alpha - 1)^2}$$

### Cas parabolique où $0 < p < p_{ultm}$

$$\sigma_{yy}(\alpha - 1) + \sigma^0(2\alpha + 1) - R(p) = 0$$

$$R(p) = \left( 1 - \left( 1 - \alpha_2 \right) \frac{p}{p_{ultm}} \right)^2 \frac{6c \cos(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$$

$$R(p) = \sigma^Y \left( 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \frac{p}{p_{ultm}} \right)^2 \right)$$

En remplaçant cette nouvelle expression de p (7) dans l'équation précédente

$$R(p) = \sigma^Y \left[ 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \frac{A\sigma_{yy} + B}{p_{ultm}} \right)^2 \right]$$

en développant on obtient l'expression suivante:

$$R(p) = a\sigma_{yy}^2 + b\sigma_{yy} + c$$



$$\text{avec } \begin{cases} a = \frac{A^2}{p_{ultm}^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \right)^2 \sigma^Y \\ b = -2 \sigma^Y \left[ 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \right) \frac{B}{p_{ultm}} \right] \left[ \frac{A}{p_{ultm}} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \right) \right] \\ c = \left[ 1 - \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_{ultm}^Y}{\sigma^Y}} \right) \frac{B}{p_{ultm}} \right]^2 \end{cases}$$

On trouve après simplification :

$$\sigma_{yy}(\alpha - 1) + \sigma^0(2\alpha + 1) - a\sigma_{yy}^2 - b\sigma_{yy} - c = 0$$

soit

$$a\sigma_{yy}^2 + (1 + b - \alpha)\sigma_{yy} + (c - \sigma^0(2\alpha + 1)) = 0$$

Résolution du polynôme d'ordre 2 :

$$\Delta = (1 + b - \alpha)^2 - 4a(c - \sigma^0(2\alpha + 1))$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{-(1 + b - \alpha) - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \sigma_2 = \frac{-(1 + b - \alpha) + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

## 2.2 Grandeurs de référence

- Contrainte  $SIXX$  au nœud  $A$
- Contrainte  $SIYY$  au nœud  $A$
- Déformation plastique cumulée  $VI$  au nœud  $A$
- Déplacement  $DY$  au nœud  $A$

## 2.3 Résultat de référence

Grandeur	Point	Inst	Référence*	Référence**
$SIXX (N/m^2)$	A	2.0	$-2.0 E6$	$-2.0 E6$
$SIYY (N/m^2)$	A	1.07	$-8.09 E6$	$-8.09 E6$
		1.16	$-8.20 E6$	$-8.01 E6$
		1.34	$-6.89 E6$	$-6.63 E6$
		1.53	$-5.80 E6$	$-5.81 E6$
$VI$	A	1.07	0	0
		1.16	$1.99 E-3$	$2.04 E-3$
		1.34	$6.35 E-3$	$6.42 E-3$
		1.53	$1.09 E-2$	$1.09 E-2$
$DY (m)$	A	1.07	$-1.05 E-3$	$-1.05 E-3$
		1.16	$-2.40 E-3$	$-2.40 E-3$
		1.34	$-5.10 E-3$	$-5.10 E-3$
		1.53	$-7.95 E-3$	$-7.95 E-3$

\* écouissage linéaire \*\* écouissage parabolique

## 2.4 Incertitude sur la solution

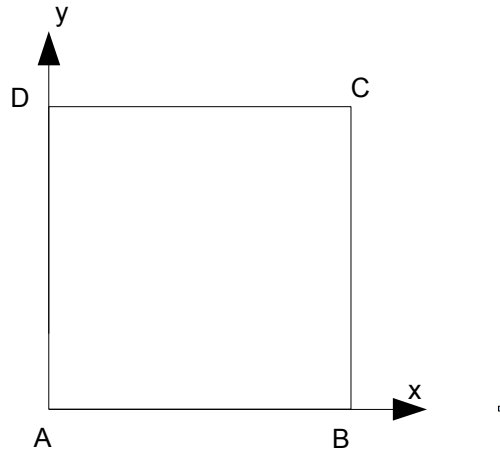
Solution analytique

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation `AXIS`.

Modèle de `DRUCK_PRAGER` à écrouissage négatif linéaire.



Nombre de nœuds	4		
Nombre de mailles	5	Soit :	
			SEG2 4
			QUAD4 1

Le carré est dans l'espace  $[0., 1.] \times [0., 1.]$ .

Coordonnées des points ( $m$ ) :

$A : (0., 0.)$   
 $B : (1., 0.)$   
 $C : (1., 1.)$   
 $D : (0., 1.)$

Mailles :

$M1$  : surface  $ABDC$   
 $M2$  : segment  $AB$   
 $M3$  : segment  $BC$   
 $M4$  : segment  $CD$   
 $M5$  : segment  $DA$

Groupes de nœuds :

$A, B$

## 3.2 Grandeurs testées et résultats

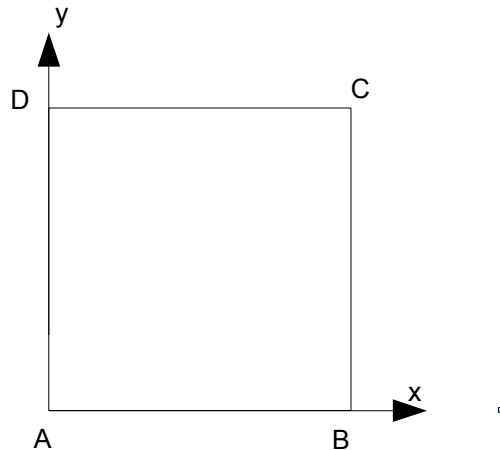
Grandeur	Point	Inst	Référence	Tolérance (%)
$S_{IXX}$ (Pa)	C	2.0	$-2.0 E6$	0.1
$S_{IYY}$ (Pa)	C	1.07	$-8.09 E6$	0.1
		1.16	$-8.20 E6$	0.1
		1.34	$-6.89 E6$	0.1
		1.53	$-5.80 E6$	0.1
$V_I$	C	1.07	0	0.1
		1.16	$1.99 E-3$	0.1
		1.34	$6.35 E-3$	0.1
		1.53	$1.09 E-2$	0.1
$DY$ (m)	C	1.07	$-1.05 E-3$	0.1
		1.16	$-2.40 E-3$	0.1
		1.34	$-5.10 E-3$	0.1
		1.53	$-7.95 E-3$	0.1

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation `AXIS`.

Modèle de `DRUCK_PRAGER` à écrouissage négatif parabolique.



Nombre de nœuds	4		
Nombre de mailles	5	Soit :	
			SEG2 4
			QUAD4 1

Le carré est dans l'espace  $[0., 1.] \times [0., 1.]$ .

Coordonnées des points ( $m$ ) :

$A : (0., 0.)$   
 $B : (1., 0.)$   
 $C : (1., 1.)$   
 $D : (0., 1.)$

Mailles :

$M1$  : surface  $ABDC$   
 $M2$  : segment  $AB$   
 $M3$  : segment  $BC$   
 $M4$  : segment  $CD$   
 $M5$  : segment  $DA$

Groupes de nœuds:

$A, B$

## 4.2 Grandeurs testées et résultats

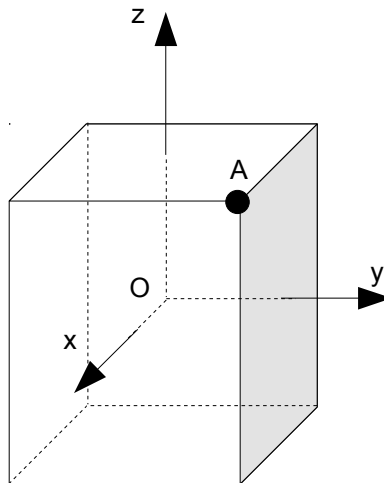
Grandeur	Point	Inst	Référence	Tolérance (%)
$S_{IXX}$ (Pa)	C	2.0	$-2.0 E6$	0.1
$S_{IYY}$ (Pa)	C	1.07	$-8.09 E6$	0.1
		1.16	$-8.01 E6$	0.1
		1.34	$-6.63 E6$	0.1
		1.53	$-5.81 E6$	0.1
$V_I$	C	1.07	0	0.1
		1.16	$2.04 E-3$	0.1
		1.34	$6.42 E-3$	0.1
		1.53	$1.09 E-2$	0.1
$DY$ (m)	C	1.07	$-1.05 E-3$	0.1
		1.16	$-2.40 E-3$	0.1
		1.34	$-5.10 E-3$	0.1
		1.53	$-7.95 E-3$	0.1

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Modélisation 3D.

Modèle de DRUCK\_PRAGER à écrouissage négatif linéaire.



Nombre de nœuds 20  
Nombre de mailles 7      Soit :  
  QUAD8      6  
  HEXA20     1

Géométrie du cube ( $m$ ) :

Centre  $O(0.,0.,0.)$   
Côté  $C=1 m$

Groupes de mailles :

<i>BAS</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Z=-0.5$
<i>HAUT</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Z=+0.5$
<i>DROITE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Y=+0.5$
<i>GAUCHE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Y=-0.5$
<i>DERRIERE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$X=-0.5$
<i>DEVANT</i> :	surface du cube appartenant au plan	$X=+0.5$

## 5.2 Grandeurs testées et résultats

Grandeur	Point	Inst	Référence	Tolérance (%)
<i>SIXX (Pa)</i>	A	2.0	$-2.0 E6$	0.1
<i>SIZZ (Pa)</i>	A	1.07	$-8.09 E6$	0.1
		1.16	$-8.20 E6$	0.1
		1.34	$-6.89 E6$	0.1
		1.53	$-5.80 E6$	0.1
<i>VI</i>	A	1.07	0	0.1
		1.16	$1.99 E-3$	0.1
		1.34	$6.35 E-3$	0.1
		1.53	$1.09 E-2$	0.1
<i>DZ (m)</i>	A	1.07	$-1.05 E-3$	0.1
		1.16	$-2.40 E-3$	0.1
		1.34	$-5.10 E-3$	0.1
		1.53	$-7.95 E-3$	0.1

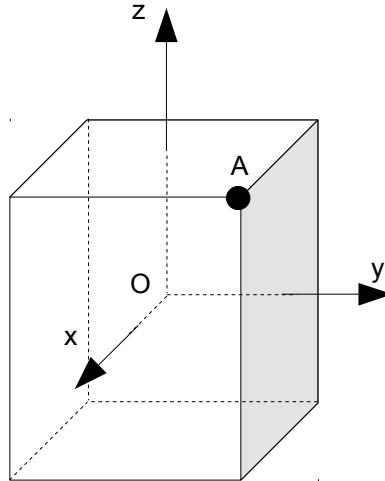


## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation D

Modélisation 3D.

Modèle de DRUCK\_PRAGER à écrouissage négatif parabolique



Nombre de nœuds	20		
Nombre de mailles	7	Soit :	
			QUAD8     6
			HEXA20    1

Géométrie du cube ( $m$ ) :

Centre  $O(0.,0.,0.)$   
Côté  $C=1 m$

Groupes de mailles :

<i>BAS</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Z=-0.5$
<i>HAUT</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Z=+0.5$
<i>DROITE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Y=+0.5$
<i>GAUCHE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$Y=-0.5$
<i>DERRIERE</i> :	surface du cube appartenant au plan	$X=-0.5$
<i>DEVANT</i> :	surface du cube appartenant au plan	$X=+0.5$

## 6.2 Grandeurs testées et résultats

Grandeur	Point	Inst	Référence	Tolérance ( % )
<i>SIXX (Pa)</i>	A	2.0	$-2.0 E6$	0.1
<i>SIZZ (Pa)</i>	A	1.07	$-8.09 E6$	0.1
		1.16	$-8.01 E6$	0.1
		1.34	$-6.63 E6$	0.1
		1.53	$-5.81 E6$	0.1
<i>VI</i>	A	1.07	0	0.1
		1.16	$2.04 E-3$	0.1
		1.34	$6.42 E-3$	0.1
		1.53	$1.09 E-2$	0.1
<i>DZ (m)</i>	A	1.07	$-1.05 E-3$	0.1
		1.16	$-2.40 E-3$	0.1
		1.34	$-5.10 E-3$	0.1
		1.53	$-7.95 E-3$	0.1

## 7 Synthèse des résultats

---

La loi de comportement de type DRUCK\_PRAGER avec un écrouissage négatif linéaire et avec un écrouissage négatif parabolique donne des résultats satisfaisants avec les modélisations AXIS et 3D.