

## SSNV507 – Rotation d'une inclusion rigide avec X-FEM

---

### Résumé :

Ce test sert à valider l'approche X-FEM dans l'hypothèse de la prise en compte des grandes rotations (DEPLACEMENT = 'GROT\_GDEP' dans l'opérateur STAT\_NON\_LINE).

Quelle que soit la modélisation, on considère une structure carrée présentant une discontinuité définissant un premier disque à l'intérieur d'un carré. On définit comme inclusion rigide, un deuxième disque à l'intérieur du premier. On impose alors une rotation finie à cette inclusion.

Les modélisations  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$  consistent à opérer la grande rotation sans prise en compte du contact. Pour cela, on bloque les déplacements de corps rigides en appliquant des conditions aux limites de blocage sur les bords du carré. Tous les points appartenant au premier disque sont entraînés par la rotation de l'inclusion et subissent la même rotation. A l'extérieur du disque, les points ne subissent aucun déplacement. La validation se fait sur les valeurs des déplacements des points qui sont à l'intérieur du disque et qui doivent correspondre au mouvement de rotation finie imposée.

Les modélisations  $G$ ,  $H$  et  $I$  consistent à opérer la grande rotation en activant le contact. On applique un déplacement sur les bords du carré. Ce déplacement est choisi de manière à obtenir une contrainte normale uniforme au niveau de la discontinuité. La validation se fait sur les valeurs des Lagrange de contact.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

La structure est un carré sain dans lequel un cercle de rayon  $R$  définit une interface (discontinuité). Un cercle de rayon  $R_1$  délimite l'inclusion et le matériau. Les dimensions de la structure sont :

$$L = 20 \text{ m}$$

$$R = 8 \text{ m}$$

$$R_1 = 3 \text{ m}$$

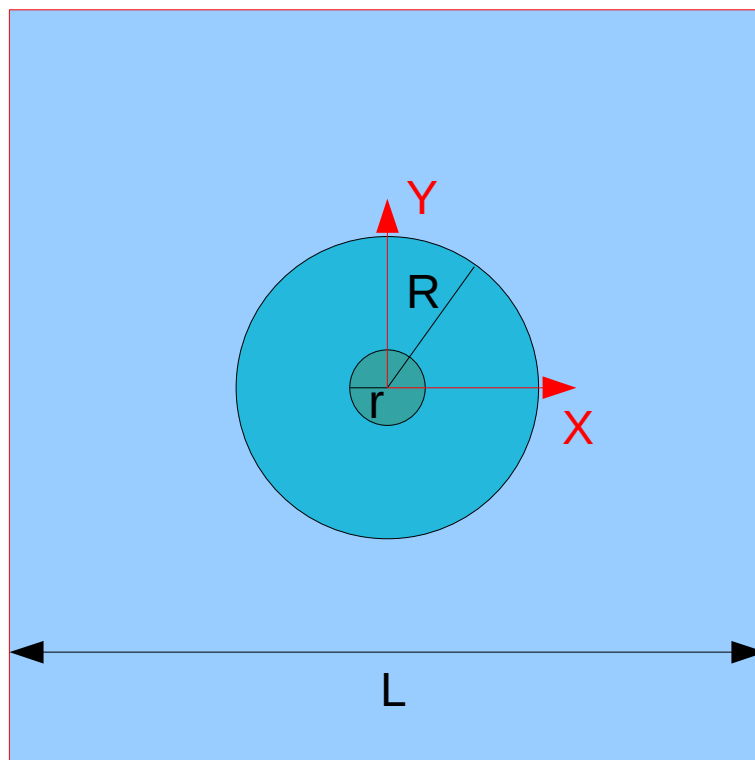


Figure 1.1-a : Géométrie de la structure.

### 1.2 Propriétés du matériau

- Module d'Young :  $E = 100 \text{ MPa}$
- Sans contact : Coefficient de Poisson :  $\nu = 0,3$
- Avec contact : Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

#### 1.3.1. Sans contact

Le blocage des déplacements horizontaux est imposé sur les côtés gauche et droit du carré (Figure 1.3-a). Le blocage des déplacements verticaux est imposé sur les cotés inférieur et supérieur du carré.

Une rotation finie horaire d'un tour complet est imposée à l'inclusion centrale. Son application se fait suivant une fonction rampe classique, en 4 pas de charge. Les valeurs numériques de la rotation imposée sont donc :

$$\omega = (90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ)$$

Concrètement, au pas de temps  $i$ , pour un nœud appartenant à l'inclusion, qui a pour coordonnées réelles de référence  $(X, Y)$ , on impose les déplacements suivants :

$$Depl_x(X, Y, i) = \sqrt{X^2 + Y^2} (\cos(\arctan(\frac{Y}{X}) - \omega(i)) - X)$$

$$Depl_y(X, Y, i) = \sqrt{X^2 + Y^2} (\sin(\arctan(\frac{Y}{X}) - \omega(i)) - Y)$$

éq 1.1

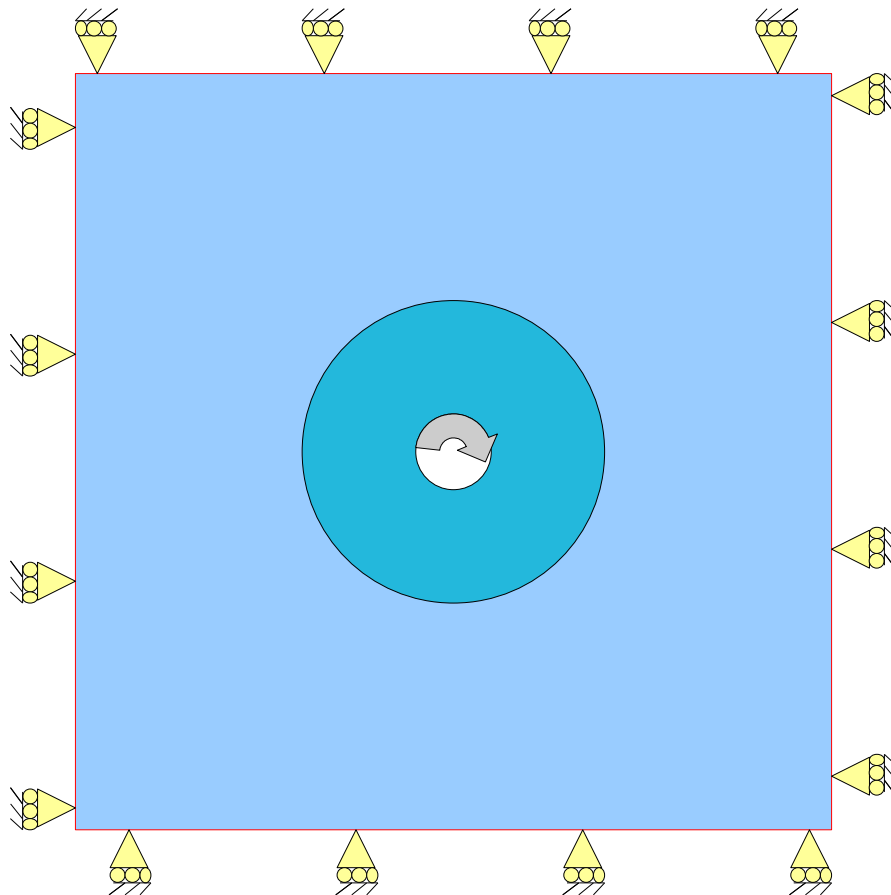


Figure 1.3-a : Illustration des conditions aux limites et des chargements.

### 1.3.2. Avec contact

Un déplacement  $u_r$  est imposé sur tous les bords du carré, il est équivalent à un déplacement radial appliqué sur un cercle de rayon  $R_2 = \frac{L}{2}$  :

$$u_r = ar + \frac{b}{r} \quad \text{éq 1.2}$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont choisis de manière à satisfaire  $\sigma_{\theta\theta}(r=R_1) = 0$  et  $\sigma_{rr}(r=R_2) = -p$  où  $p = 1.10^6 \text{ Pa}$  :

$$a = \frac{-p}{E} \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$$
$$b = \frac{p}{E} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$$

éq 1.3

Une rotation finie horaire d'un quart de tour est imposée à l'inclusion centrale. Son application se fait suivant une fonction rampe classique, en 4 pas de charge. Les valeurs numériques de la rotation imposée sont donc :

$$\omega = \left( \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Concrètement, au pas de temps  $i$ , pour un nœud appartenant à l'inclusion, qui a pour coordonnées réelles de référence  $(X, Y)$ , on impose les déplacements suivants :

$$Depl_x(X, Y, i) = \sqrt{X^2 + Y^2} \left( \cos\left(\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) - \omega(i)\right) - X \right)$$
$$Depl_y(X, Y, i) = \sqrt{X^2 + Y^2} \left( \sin\left(\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) - \omega(i)\right) - Y \right)$$

éq 1.4

## 2 Solution de référence

---

### 2.1 Sans contact

On teste chaque nœud à l'intérieur du disque délimité par l'interface. Pour chacun de ces nœuds, la solution de référence est fournie analytiquement par le calcul de son déplacement. Ce déplacement doit correspondre à la rotation imposée à l'inclusion: il est donc calculé en utilisant l'équation 1.1.

### 2.2 Avec contact

On teste chaque nœud appartenant à l'interface. Pour chacun de ces nœuds, la solution de référence est fournie analytiquement par le calcul de la pression de contact. Elle est calculée en utilisant l'équation 1.2 :

$$\lambda = aE - \frac{bE}{R^2}$$

éq 2.1

### 3 Modélisation A

#### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation X-FEM, en déformations planes (D\_PLAN). La discontinuité est définie par une fonction de niveau (level set normale notée  $L_n$ ) directement introduite dans le fichier de commande à l'aide de l'opérateur DEFI\_FISS\_XFEM [U4.82.08]. Cette fonction représente le cercle de rayon  $R$  :

$$L_n = R^2 - X^2 - Y^2 \quad \text{Éq 3.1}$$

#### 3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 3.2-a) comporte 361 mailles de type QUAD4.

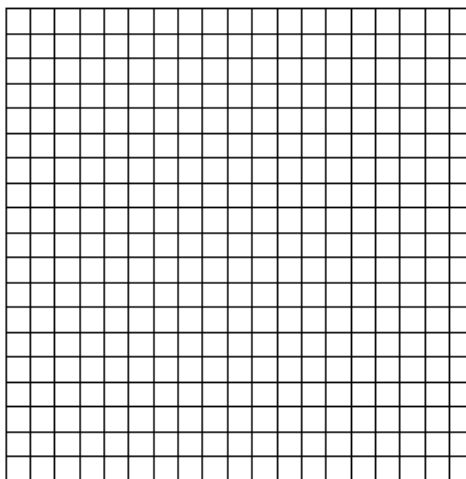


Figure 3.2-a : Le maillage de la modélisation A.

#### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de charge, on calcule pour tous les nœuds à l'intérieur du disque, la différence absolue entre le déplacement obtenu par le calcul aster et celui calculé analytiquement. Pour chacun de ces nœuds, la différence doit être nulle. Pour aller plus vite on teste la somme de toutes ces différences qui doit aussi valoir zéro.

Pas	Identification	Référence	Type	Tolérance (%)
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1,00E-008
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1,00E-008
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1,00E-008
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1,00E-008

#### 3.4 Commentaires

On a imposé une rotation rigide aux nœuds de l'inclusion. Le test montre que l'inclusion entraîne tous les autres nœuds du disque (non concernés par la condition limite de rotation) de la même rotation. Si on lance ce cas test en remplaçant 'GROT\_GDEP' par 'PETIT' dans l'opérande DEPLACEMENT, le disque 'gonfle' et les déplacements des nœuds testés ne suivent plus la rotation finie.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : C\_PLAN .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 4.2-a) comporte 722 mailles de type TRIA3.

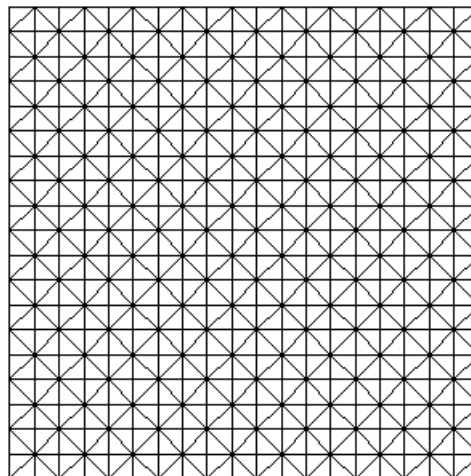


Figure 4.2-a : Le maillage de la modélisation B.

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la somme des différences des déplacements comme pour la modélisation A .

Pas	Identification	Référence	Type	Tolérance (%)
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008

### 4.4 Commentaires

Idem modélisation A

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit des mêmes caractéristiques de modélisation que celles de la modélisation *A* mais en 3D :

- on extrude de 2 mètres dans la direction *Z* (1 élément),
- on bloque les mouvements de corps rigide dans cette direction,
- la level set normale (définie par l'équation 3.1) représente maintenant un cylindre.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 5.2-a) comporte 361 mailles de type HEXA8.

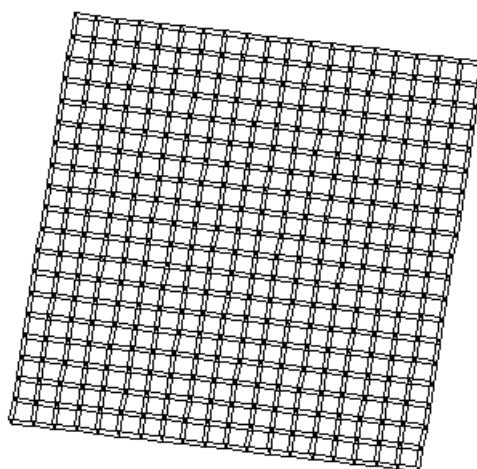


Figure 5.2-a : Le maillage de la modélisation C.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la somme des différences des déplacements comme pour la modélisation *A*.

Pas	Identification	Référence	Type	Tolérance (%)
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008

### 5.4 Commentaires

Idem modélisation *A*

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit des mêmes caractéristiques de modélisation que celles de la modélisation *C*.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 6.2-a) comporte 2166 mailles de type TETRA4.

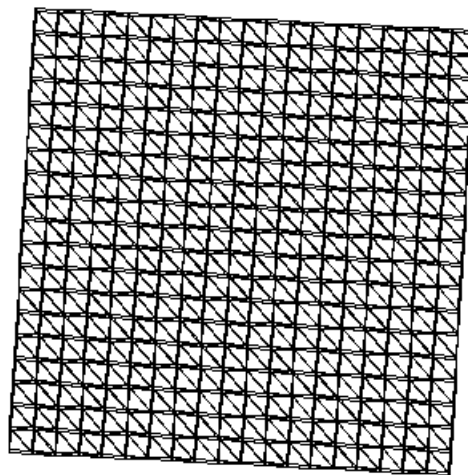


Figure 6.2-a : Le maillage de la modélisation D.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la somme des différences des déplacements comme pour la modélisation *A*.

Pas	Identification	Référence	Type	Tolérance (%)
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1.0e-008

### 6.4 Commentaires

Idem modélisation *A*



## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : D\_PLAN .

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 7.2-a) comporte 361 mailles de type QUAD8.

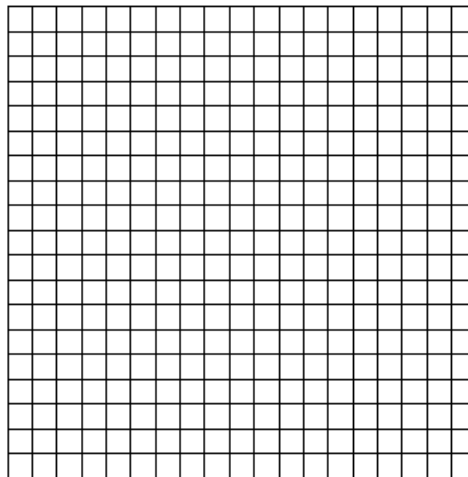


Figure 7.2-a : Le maillage de la modélisation E.

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

Pour chaque pas de charge, on calcule pour tous les nœuds à l'intérieur du disque, la différence absolue entre le déplacement obtenu par le calcul de Code\_Aster et celui calculé analytiquement. Pour chacun de ces nœuds, la différence doit être nulle. Pour aller plus vite on teste la somme de toutes ces différences qui doit aussi valoir zéro.

Pas	Identification	Référence	Type	% tolérance
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8

### 7.4 Commentaires

Ce test valide le calcul de la matrice de rigidité en grandes rotations avec des éléments QUAD8 .

## 8 Modélisation F

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : C\_PLAN .

### 8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 9.2-a) comporte 722 mailles de type TRIA6.

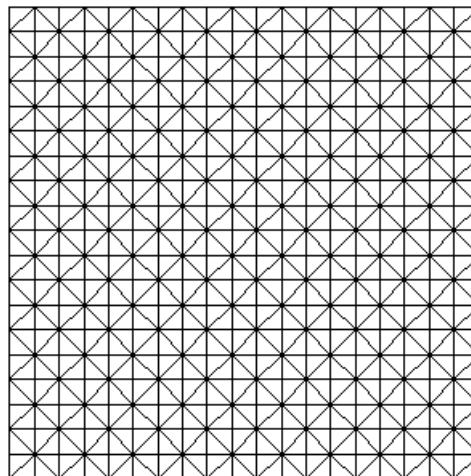


Figure 9.2-a : Le maillage de la modélisation F.

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

On teste la somme des différences des déplacements comme pour la modélisation A .

Pas	Identification	Référence	Type	% tolérance
1	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
2	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
3	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8
4	SOMM	0	ANALYTIQUE	1E-8

### 8.4 Commentaires

Ce test valide le calcul de la matrice de rigidité en grandes rotations avec des éléments TRIA6.

## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : D\_PLAN .

Le contact est traité avec des éléments X-FEM linéaires P1 (déplacement) P1 (pression), c'est-à-dire portant les degrés de liberté de déplacement et les Lagrange de contact sur tous les nœuds (formulation contact aux nœuds) .

### 9.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 9.2-a) comporte 10201 mailles de type QUAD4.

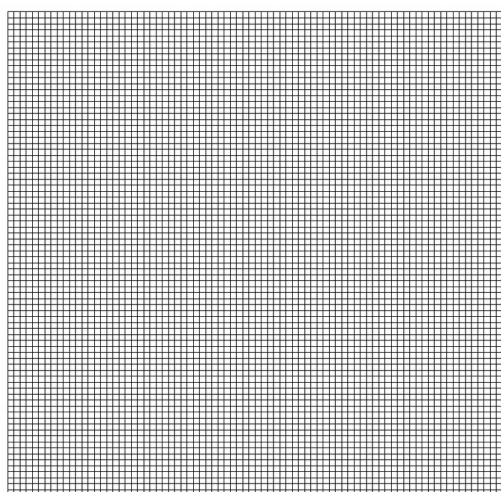


Figure 9.2-a : Le maillage de la modélisation G.

### 9.3 Fonctionnalités testées

On utilise un schéma d'intégration réduit à 3 points de Gauss par facette de contact. Le frottement n'est pas pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 9.4 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur maximale et minimale de la pression normale de contact post-traitée à chaque pas de temps.

Pas	Identification	Référence	Type	% tolérance
1	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
2	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
3	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
4	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
5	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
6	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0

	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
7	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
8	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
9	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
10	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	22.0

## 9.5 Commentaires

Ce test valide :

- le réappariement,
- le calcul de la matrice de rigidité en grandes rotations,
- le calcul des matrices de contact en grands glissements (intégration sur un SE2 aux points de Gauss),
- le post- traitement X-FEM des éléments P1P1 .

## 10 Modélisation H

### 10.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : D\_PLAN .

Le contact est traité avec des éléments X-FEM linéaires P2 (déplacement) P1 (pression), c'est-à-dire portant les degrés de liberté de déplacement sur tous les nœuds et les Lagrange de contact sur les nœuds sommets (formulation contact aux nœuds) .

### 10.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 10.2-a) comporte 2500 mailles de type QUAD8.

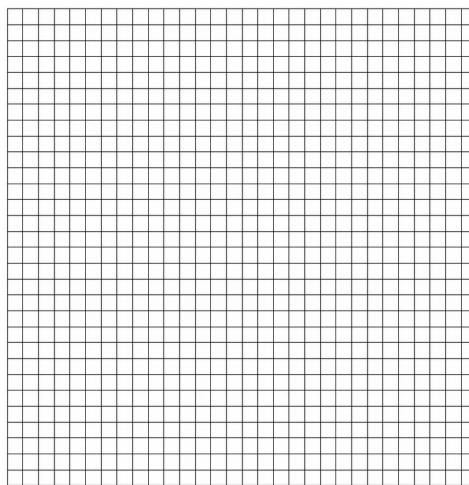


Figure 10.2-a : Le maillage de la modélisation I.

### 10.3 Fonctionnalités testées

On utilise un schéma d'intégration réduit à 3 points de Gauss par facette de contact. Le frottement n'est pas pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 10.4 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur maximale et minimale de la pression normale de contact post-traitée à chaque pas de temps.

Pas	Identification	Référence	Type	% tolérance
1	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
2	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
3	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
4	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
5	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
6	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5

	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
7	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
8	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
9	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
10	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5.5

## 10.5 Commentaires

Ce test valide :

- le réappariement (interface courbe et éléments à bords droits),
- le calcul de la matrice de rigidité en grandes rotations,
- le calcul des matrices de contact en grands glissements (intégration sur un SE3 aux points de Gauss),
- le post- traitement X-FEM des éléments P2P1 .

## 11 Modélisation I

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation : D\_PLAN .

Le contact est traité avec des éléments X-FEM linéaires P2 (déplacement) P1 (pression), c'est-à-dire portant les degrés de liberté de déplacement sur tous les nœuds et les Lagrange de contact sur les nœuds sommets (formulation contact aux nœuds) .

### 11.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage (Figure 11.2-a) comporte 2601 mailles de type TRIA6.

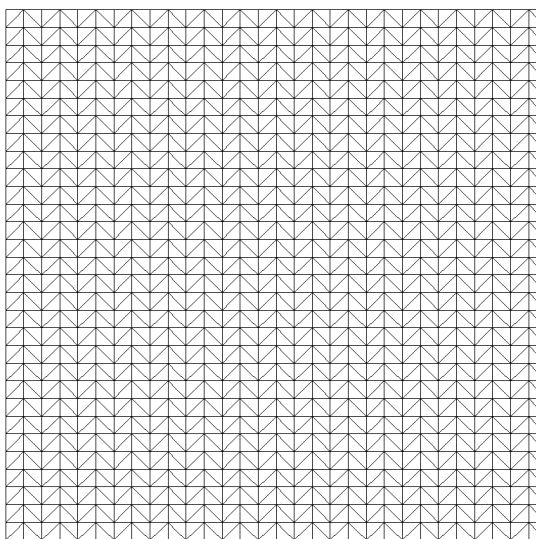


Figure 11.2-a : Le maillage de la modélisation J.

### 11.3 Fonctionnalités testées

On utilise un schéma d'intégration réduit à 3 points de Gauss par facette de contact. Le frottement n'est pas pris en compte et le contact est actif dès la 1<sup>ère</sup> itération de contraintes actives. L'algorithme visant à restreindre l'espace des multiplicateurs de Lagrange est le n°2.

### 11.4 Grandeurs testées et résultats

On teste la valeur maximale et minimale de la pression normale de contact post-traitée à chaque pas de temps.

Pas	Identification	Référence	Type	% tolérance
1	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
2	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
3	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
4	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
5	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0

6	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
7	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
8	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
9	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
10	LAGS_C (MAX)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0
	LAGS_C (MIN)	-1.11552e6	ANALYTIQUE	5,0

## 11.5 Commentaires

Ce test valide :

- le réappariement (interface courbe et éléments à bords droits),
- le calcul de la matrice de rigidité en grandes rotations,
- le calcul des matrices de contact en grands glissements (intégration sur un SE3 aux points de Gauss),
- le post- traitement X-FEM des éléments P2P1 .



## 12 Synthèse des résultats

---

Les objectifs de ce test sont atteints. Il s'agissait de montrer la faisabilité de la prise en compte des grandes rotations avec X-FEM :

- en 2D (déformations planes et contraintes planes) pour des éléments linéaires QUAD4 et TRIA3, et quadratiques QUAD8 et TRIA6,
- en 3D pour des éléments HEXA8 et TETRA4.

Il s'agissait de montrer la faisabilité de la prise en compte du contact sur les lèvres de l'interface en grands glissements :

- en 2D P1 (déplacement) P1 (pression) sur un maillage quadrangle et triangle.
- en 2D P2 (déplacement) P1 (pression) sur un maillage quadrangle et triangle.