

---

## SSNV515 – Essai de traction avec la loi de Rankine

---

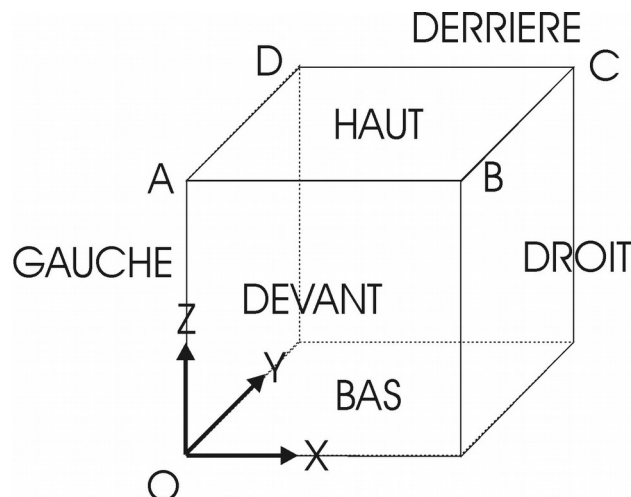
### Résumé

On réalise un essai de traction simple avec *la loi de Rankine*. Les solutions calculées sont comparées à une solution analytique. Trois modélisations sont proposées :

- une modélisation 0D avec SIMU\_POINT\_MAT ;
- une modélisation 3D ;
- une modélisation 2D axisymétrique ;

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



L'essai de traction simple est effectué sur un seul élément fini isoparamétrique de forme cubique *CUB4*. La longueur de chaque arête vaut 1. Les différentes facettes de ce cube sont des groupes de mailles nommés *HAUT*, *BAS*, *DEVANT*, *DERRIERE*, *DROIT* et *GAUCHE*. Le groupe de mailles *SYM* contient par ailleurs les groupes de mailles *BAS*, *DEVANT* et *GAUCHE*; le groupe de mailles *COTE* les groupes de mailles *DERRIERE* et *DROIT*.

### 1.2 Propriétés de matériaux

Les propriétés élastiques sont :

- module d'Young :  $E = 1 \text{ MPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu = 0,25$

La limite en traction est égale à  $\sigma_t = 1 \text{ kPa}$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

L'essai de traction simple consiste à imposer à l'éprouvette une elongation verticale tout en maintenant la pression latérale constante et égale à la contrainte isotrope initiale  $P_0 = 10 \text{ kPa}$

Dans le modèle considéré, l'élément cubique représente un huitième de l'échantillon. Les conditions limites sont donc les suivantes :

- Les conditions de symétrie :
  - $u_z = 0$  sur le groupe de maille *BAS*
  - $u_x = 0$  sur le groupe de maille *GAUCHE*
  - $u_y = 0$  sur le groupe de maille *DEVANT*
- Les conditions de pression latérale :
  - $P_n = P_0 = 10 \text{ kPa}$  sur les groupes de mailles *DROIT* et *ARRIERE*
- Les conditions de chargement :
  - $u_z = +1$  sur le groupe de maille *HAUT*

Le chargement s'effectue en 30 pas de temps entre  $t=0$  et  $t=30$  pendant lesquels le déplacement imposé sur le groupe de mailles *HAUT* varie de  $u_z=0$  à  $u_z=0.3$  (déformation verticale totale de 30%).

## 1.4 Résultats

Les solutions sont post-traitées au point  $C$ , en termes de :

- contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  ;
- déformation horizontale  $\epsilon_{xx}$  ;
- norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre  $t=0$  et  $t=20$ .

## 2 Solution analytique

Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$\begin{cases} A = K + \frac{4}{3}G \\ B = K - \frac{2}{3}G \\ C = 2\left(K + \frac{G}{3}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Avec  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  et  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  les modules de compressibilité et de cisaillement, respectivement.

Soit  $\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité de Hooke, on aura avec l'hypothèse  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{xx}$  :

$$\mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} = \begin{cases} Bd\epsilon_{zz} + Cd\epsilon_{xx} \\ Bd\epsilon_{zz} + Cd\epsilon_{xx} \\ Ad\epsilon_{zz} + 2Bd\epsilon_{xx} \end{cases} \quad (2)$$

On notera pour simplifier la contrainte verticale à l'instant  $t$   $\sigma^+ = \sigma_{zz}^+$ , de sorte que le critère de Rankine s'écrit :

$$\sigma^+ \leq \sigma_t \quad (3)$$

On a par ailleurs :

$$\begin{cases} \sigma^{\text{préd}} = \sigma^- + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\epsilon} \\ \sigma^+ = \sigma^- + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot (d\boldsymbol{\epsilon} - d\lambda \mathbf{n}) = \sigma^{\text{préd}} - \underbrace{d\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}}_{\Delta\sigma_c} \end{cases} \quad (4)$$

Avec  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et où :

$$d\lambda = \frac{\langle \sigma^{\text{préd}} - \sigma_t \rangle_+}{A} \quad (5)$$

D'après la loi d'écoulement associée, on a aussi :

$$\begin{cases} d\epsilon_{zz}^P = d\lambda = d\epsilon_v^P \\ e^P = \frac{2}{3}d\lambda \end{cases} \quad (6)$$

Comme  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\Delta\sigma_c = d\lambda A \quad (7)$$

La combinaison des équations (7), (5) et (4) nous donne la contrainte  $\sigma_{zz}^+$ . Les équations (6) et (5) nous donnent la norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P$ .

Essayons d'obtenir maintenant l'expression de la déformation élastique horizontale  $\epsilon_{xx}^{\text{élas}}$ .

Latéralement, on a la condition  $\sigma_{xx}^+ = P_0$ , soit :

$$\sigma_{xx}^{\text{préd}} - \Delta \sigma_{xx,C} = P_0 \quad (8)$$

Avec  $\Delta \sigma_{xx,C} = d \lambda B$

On obtient alors en utilisant l'équation (2) :

$$\sigma_{xx}^- + C d \epsilon_{xx}^{\text{élas}} + B d \epsilon_{zz} - B d \lambda = P_0 \quad (9)$$

D'où l'incrément de déformation élastique horizontale :

$$d \epsilon_{xx}^{\text{élas}} = \frac{P_0 - \sigma_{xx}^- + B(d \lambda - d \epsilon_{zz})}{C} \quad (10)$$

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation A est réalisée sur un point matériel 0D avec SIMU\_POINT\_MAT.

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

#### 3.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point  $C$ , en termes de :

- contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  ;
- déformation horizontale  $\epsilon_{xx}$  ;
- norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre  $t=0$  et  $t=20$ . Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \text{ [Pa]}$$

Variable	Ecart absolu   Code_Aster – Analytique
$\sigma_{zz}$	0
$\epsilon_{xx}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$e^P$	$1.333 \cdot 10^{-5}$

#### 3.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation B est réalisée en 3D avec STAT\_NON\_LINE.

### 4.2 Grandeurs testées et résultats

#### 4.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point  $C$ , en termes de :

- contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  ;
- déformation horizontale  $\epsilon_{xx}$  ;
- norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre  $t=0$  et  $t=20$ . Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu   Code_Aster - Analytique
$\sigma_{zz}$	0
$\epsilon_{xx}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$e^P$	$1.333 \cdot 10^{-5}$

#### 4.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation C est réalisée sur un point matériel 2D axisymétrique avec STAT\_NON\_LINE.

### 5.2 Grandeurs testées et résultats

#### 5.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point  $C$ , en termes de :

- contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  ;
- déformation horizontale  $\epsilon_{xx}$  ;
- norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P = \|\mathbf{e}^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre  $t=0$  et  $t=20$ . Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{s} : \underline{s}} \quad [Pa]$$

Variable	Ecart absolu   Code_Aster – Analytique
$\sigma_{zz}$	0
$\epsilon_{xx}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$e^P$	$1.333 \cdot 10^{-5}$

#### 5.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.



## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

La modélisation D est réalisée sur un point matériel 3D avec STAT\_NON\_LINE. La différence par rapport à la modélisation B est le calcul de l'état initial par un chargement thermique. Pour amener l'échantillon à la contrainte isotrope initiale  $P_0 = 10 \text{ kPa}$ , on amène l'échantillon de 20° à 30° celcius. Les déplacements de l'échantillon sont bloqués, de sorte que la dilatation thermique amène l'échantillon en compression. On obtient :

$$\sigma_0 = \frac{E}{9(1-2\nu)} \alpha \Delta T = P_0$$

Soit la valeur suivante du coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = \frac{9(1-2\nu)P_0}{E \Delta T}$

### 6.2 Grandeurs testées et résultats

#### 6.2.1 Valeurs testées

Les solutions sont post-traitées au point C, en termes de :

- contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  ;
- déformation horizontale  $\epsilon_{xx}$  ;
- norme de la déformation plastique déviatorique  $e^P = \|e^P\|$

Elles sont comparées à une solution analytique (décrite dans le paragraphe suivant) en termes d'écart maximal entre  $t=0$  et  $t=20$ . Les résultats sont récapitulés dans les tableaux suivants :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \text{ [Pa]}$$

Variable	Ecart absolu   Code_Aster – Analytique
$\sigma_{zz}$	0
$\epsilon_{xx}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$e^P$	$1.333 \cdot 10^{-5}$

#### 6.2.2 Commentaires

L'écart avec la solution analytique est très faible.

## 7 Synthèse des résultats

On représente dans les figures suivantes l'évolution des différentes grandeurs lors de l'essai de traction avec la loi de Rankine.

### TRACTION TEST WITH RANKINE

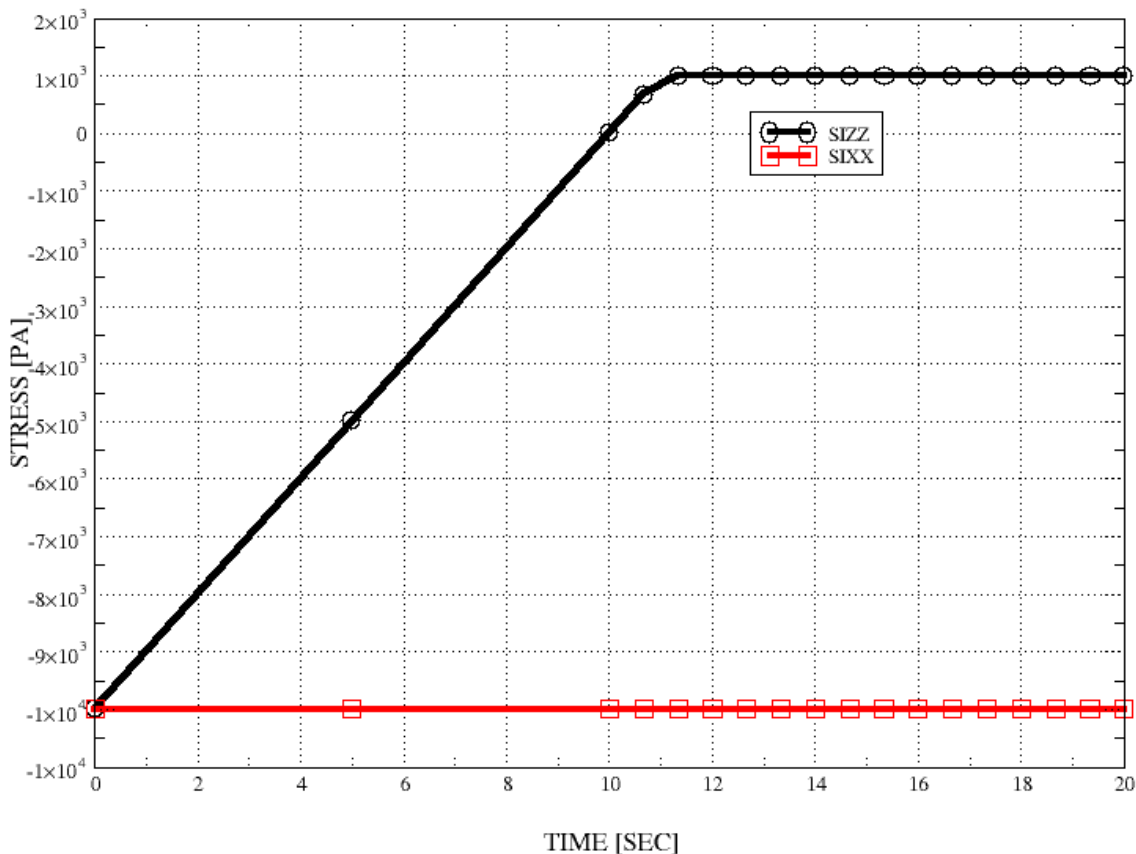


Figure 1 : Evolution des contraintes lors de l'essai de traction

## TRACTION TEST WITH RANKINE

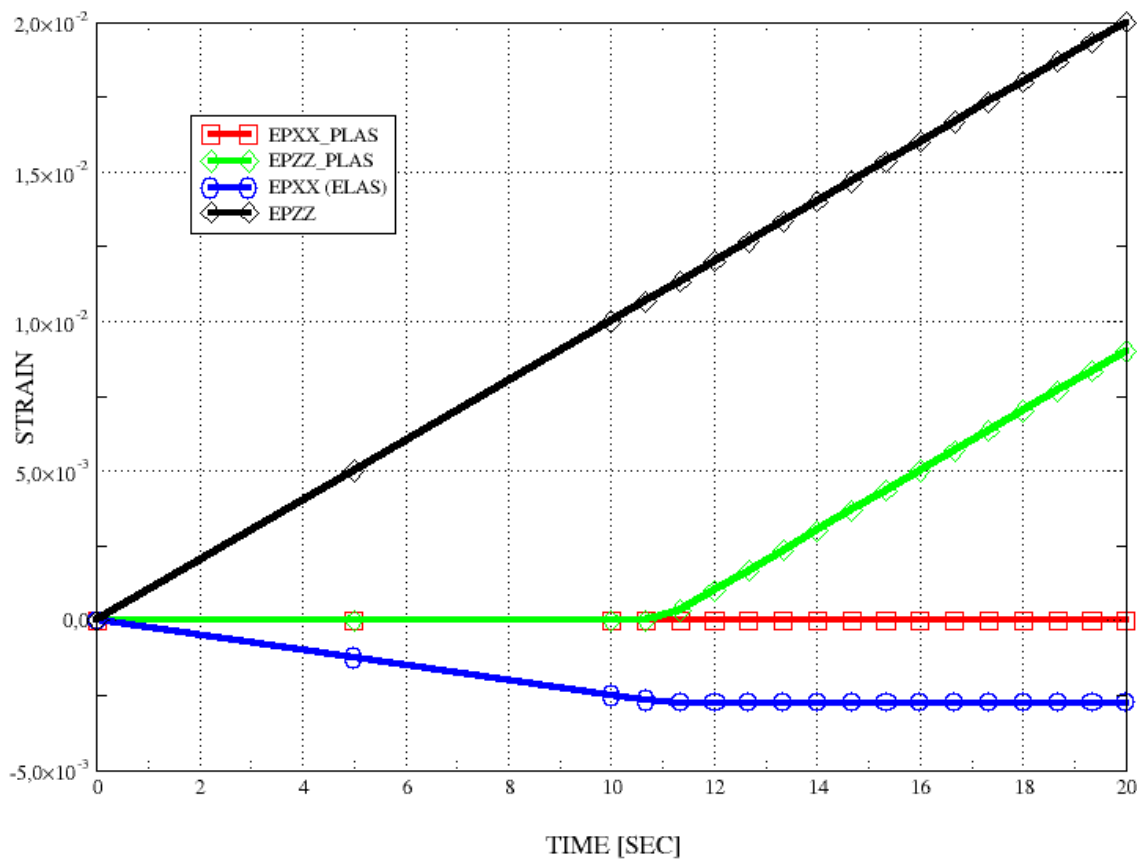


Figure 2 : Evolution des déformations lors de l'essai de traction

## TRACTION TEST WITH RANKINE

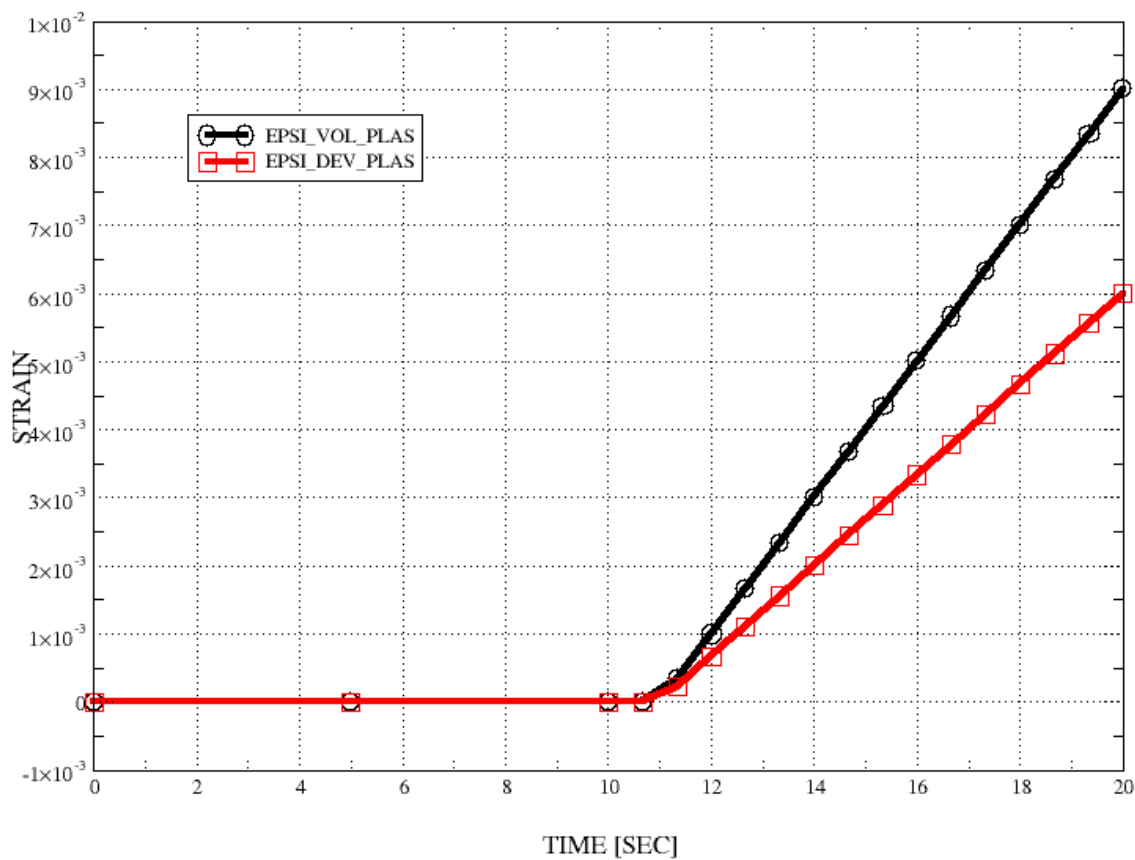


Figure 3 : Evolution des variables internes lors de l'essai de traction