

## SSNS100 - Comportement non linéaire d'une nappe d'armatures sous chargement thermique

---

### Résumé :

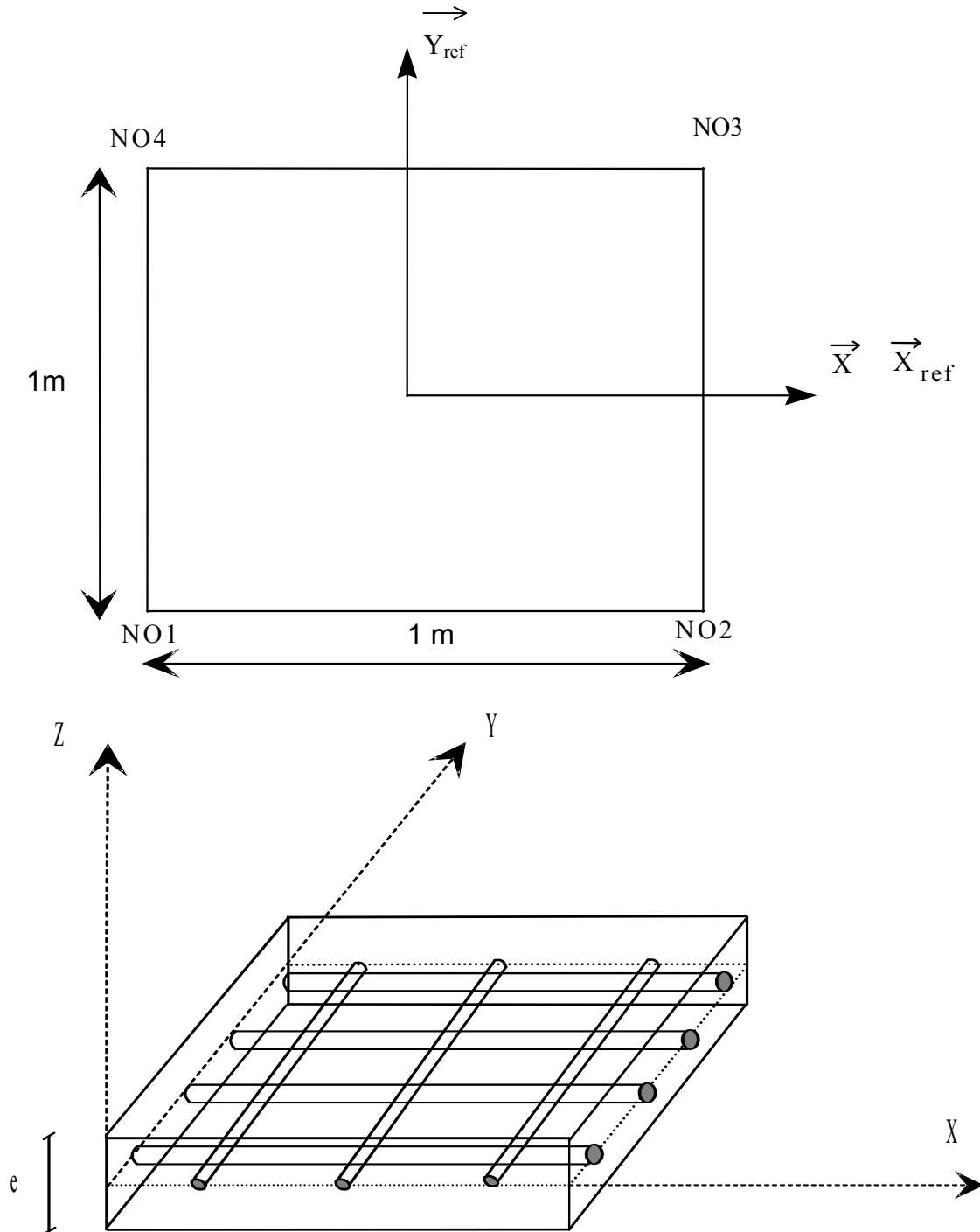
Une nappe d'armatures non excentrée par rapport au feuillet moyen et encastrée sur ses quatre côtés est soumise à un chargement thermique. Les orientations des armatures sont confondues avec les axes  $(X, Y)$  du repère global.

L'intérêt principal de ce test est de valider l'intégration numérique des modèles de comportement élasto-plastique `GRILLE_ISOT_LINE`, `GRILLE_CINE_LINE` et `GRILLE_PINTO_MEN` d'une nappe d'armatures associée à l'élément fini `GRILLE_EXCENTRE` (plaque avec excentrement par rapport au plan de référence), dans l'algorithme général `STAT_NON_LINE`.

Afin d'obtenir des solutions de référence, des solutions analytiques ont été établies pour les deux comportements élasto-plastiques à écrouissage isotrope linéaire et cinématique linéaire. Le comportement de Pinto-Menegotto est validé par non régression des résultats numériques obtenus avec Aster en version 5-3 (cf. [§1.3.3]).

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie de la plaque



## 1.2 Caractéristiques des modélisations

Ce cas test est composé de 8 modélisations. Le tableau ci-dessous résume leurs caractéristiques :

- 1) Orientation des armatures : direction longitudinale ( $L$ ) :  $OX$ ; direction transversale ( $T$ ) :  $OY$
- 2) Excentrement =  $0m$
- 3) Section par mètre linéaire =  $0,01 m^2/ml$  (même épaisseur dans les directions transversale et longitudinale en cas de présence d'armatures transversales)

Modélisation	Loi de comportement	Présence d'armature transversale	Mode d'application de la température
A	isotrope linéaire	Oui	aux nœuds
B	cinématique linéaire	Oui	aux nœuds
C	Pinto Menegotto	Oui	aux nœuds
D	Pinto Menegotto	Oui	aux éléments
E	Pinto Menegotto	Non	aux éléments
F	isotrope linéaire	Non	aux nœuds
G	cinématique linéaire	Non	aux nœuds
H	Pinto Menegotto	Non	***

\*\*\* Pour le cas test H, le chargement en température est remplacé par un chargement mécanique (déplacement imposé aux nœuds).

## 1.3 Propriétés des matériaux

### 1.3.1 Propriétés communes à toutes les modélisations

Module d'Young :  $E = 2.10^{11} MPa$

Coefficient de Poisson :  $\nu = 0$

Limite d'élasticité :  $\sigma_y = 2.10^8 MPa$

Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha = 10^{-5} (^\circ C^{-1})$

### 1.3.2 Comportement plastique isotrope et cinématique

Pour les comportements isotrope (GRILLE\_ISOT\_LINE) et cinématique (GRILLE\_CINE\_LINE)

Pente d'écrouissage:  $E_T = 2.10^{10} MPa$

### 1.3.3 Comportement de Pinto Menegotto

Pour le comportement PINTO MENEGOTTO (GRILLE\_PINTO\_MEN)

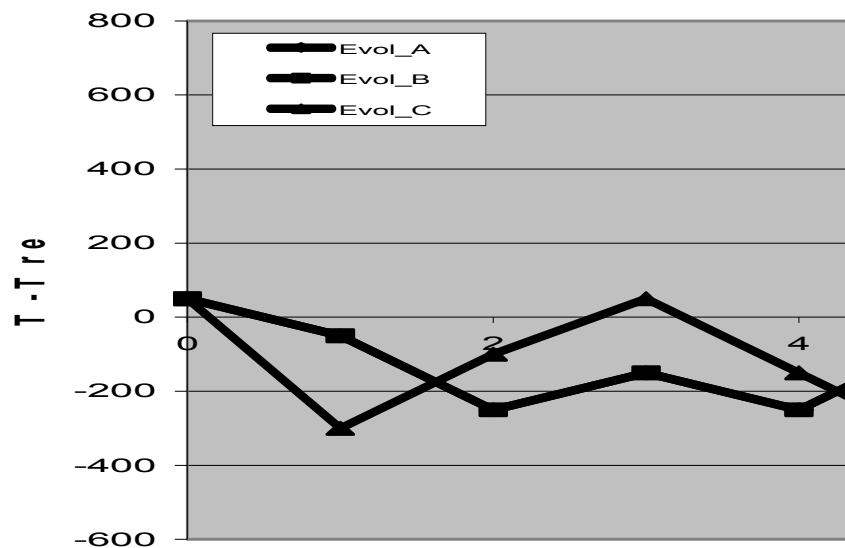
EPSI\_ULTM :  $3,0. 10^{-2}$   
SIGM\_ULTM :  $2,58. 10^8$   
EPSP\_HARD : 0,0023  
R\_PM : 20,0  
EP\_SUR\_E : 0,01  
A1\_PM : 18,5  
A2\_PM : 0,15  
ELAN : 4,9  
A6\_PM : 620,0  
C\_PM : 0,5  
A\_PM : 0,008

## 1.4 Conditions aux limites et chargement

La plaque est entièrement encadrée pour les modélisations A à G (thermo-mécanique). Pour la modélisation H (mécanique), on bloque tous les déplacements et toutes les rotations aux nœuds sauf  $UX$  pour les nœuds  $NO2$  et  $NO3$ .

Le chargement est d'origine thermique pour les modélisations A à G. L'évolution de la température en fonction du temps est donnée pour chaque modélisation dans le tableau suivant. La température est appliquée aux nœuds ou aux éléments, selon la modélisation.

Instant	Évolution A	Évolution B	Évolution C
	$T^{\circ}$	$T^{\circ}$	$T^{\circ}$
0	50	50	50
1	-50	-50	-300
2	-250	-250	-100
3	-150	-150	50
4	-250	-250	-150
5	-50	-50	-350
6	350	350	-200
7	50	150	
8	-450	-450	
9	-110	-250	
10	550	650	
11	50	450	



On a pris pour tous les tests une température de référence de  $50^{\circ}$ .

Pour la modélisation H, on applique une force nodale  $FX$  aux nœuds  $NO2$  et  $NO3$  (dirigée suivant le vecteur  $UX$ ) en pilotant le calcul par le déplacement  $UX$  de  $NO3$  pour qu'il suive l'évolution suivante :

Instant	0.001	0.0023	0.03	0.2	0.4	6.4	7.92
$U_x (m)$	0.001	0.0023	0.03	0.0296667	0.02	-0.04	-0.033

Instant	17	19	20	21	22	25	50
$U_x$ ( m )	0.01	0.03	0.0298	0.026	0.022	0.025	0.05

## 2 Solutions de référence

### 2.1 Comportement plastique isotrope

La solution de référence se calcule analytiquement.

On note  $T^+$ ,  $\varepsilon_p^+$ ,  $p^+$ ,  $\varepsilon^+$  la température, la déformation plastique, la déformation plastique cumulée et la déformation totale à l'instant de calcul, et  $T^-$ ,  $\varepsilon_p^-$ ,  $p^-$  les mêmes quantités à l'instant précédent.  $T_{ref}$  désigne la température de référence.

La solution se calcule de la façon suivante :

$$\sigma_e = E \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) - \varepsilon_p^- \right]$$

$$R(p) = \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} p + \sigma_y$$

$$\text{si } |\sigma_e| \leq R(p^-)$$

$$\varepsilon_p^+ = \varepsilon_p^- ; p^+ = p^- ; \sigma^+ = \sigma_e$$

sinon

$$\text{si } \sigma_e > R(p^-)$$

$$\varepsilon_p^+ = \frac{E - E_T}{E} \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) - \frac{\sigma_y}{E} \right] + \frac{E_T}{E} \left[ \varepsilon_p^- - p^- \right]$$

$$p^+ = p^- + \varepsilon_p^+ - \varepsilon_p^-$$

$$\sigma^+ = R(p^+)$$

sinon

$$\varepsilon_p^+ = \frac{E - E_T}{E} \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) + \frac{\sigma_y}{E} \right] + \frac{E_T}{E} \left[ \varepsilon_p^- + p^- \right]$$

$$p^+ = p^- - \varepsilon_p^+ + \varepsilon_p^-$$

$$\sigma^+ = -R(p^+)$$

Ce calcul est fait dans chaque direction. Pour le cas traité,  $\varepsilon^+ = 0$  à tout instant.

La contrainte mémorisée dans Aster est la contrainte réelle existant dans chaque grille de cette direction. Les variables internes ( $\varepsilon_p$  et  $p$ ) sont calculées à partir des équations ci-dessus.

## 2.2 Comportement plastique cinématique

La solution de référence se calcule analytiquement.

On note  $T^+$ ,  $\varepsilon_p^+$ ,  $\varepsilon^+$ ,  $X^+$  la température, la déformation plastique et la variable d'érouissage cinématique à l'instant de calcul, et  $T^-$ ,  $\varepsilon_p^-$ ,  $X^-$  les mêmes quantités à l'instant précédent.

La solution se calcule de la façon suivante :

$$\sigma_e = E \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) - \varepsilon_p^- \right]$$

$$\text{si } |\sigma_e - X^-| \leq \sigma_y$$

$$\left| \varepsilon_p^+ = \varepsilon_p^- ; X^+ = X^- ; \sigma^+ = \sigma_e \right.$$

sinon

$$\text{si } \sigma_e - X^- > \sigma_y$$

$$\left| \varepsilon_p^+ = \frac{E - E_T}{E} \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) - \frac{\sigma_y}{E} \right|$$

$$\left| X^+ = E_T \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) - \frac{\sigma_y}{E} \right|$$

$$\left| \sigma^+ = E_T \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) \right] + \frac{E - E_T}{E} \sigma_y \right|$$

sinon

$$\left| \varepsilon_p^+ = \frac{E - E_T}{E} \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) + \frac{\sigma_y}{E} \right|$$

$$\left| X^+ = E_T \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) + \frac{\sigma_y}{E} \right|$$

$$\left| \sigma^+ = E_T \left[ \varepsilon^+ - \alpha(T^+ - T_{ref}) \right] - \frac{E - E_T}{E} \sigma_y \right|$$

Ce calcul est fait dans chaque direction. Pour le cas traité,  $\varepsilon^+ = 0$  à tout instant.

La contrainte mémorisée dans *Aster* est la contrainte réelle existant dans chaque grille de cette direction.

## 2.3 Comportement Pinto Ménégotto

La solution de référence est celle obtenue par un calcul *Aster* avec le même maillage sur lequel on applique des cycles de charge/décharge, en déplacement imposé, permettant de recréer les déformations issues des calculs thermo-mécaniques présentés ci-après. Le test correspondant n'est donc qu'un test de non régression, en comparant les contraintes obtenues par ces deux types de modélisation : d'une part mécanique, et d'autre part thermo-mécanique.

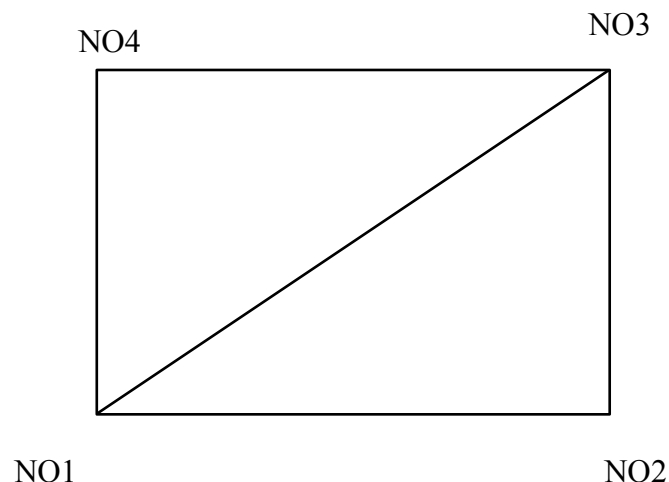
La contrainte mémorisée dans *Aster* est la contrainte réelle existant dans chaque grille de cette direction.

## 3 Modélisation A

L'éprouvette est maillée avec deux éléments TRIA3 à trois nœuds pour toutes les modélisations.

- 2 éléments grilles pour modéliser les fibres dans la direction  $OX$
- 2 éléments grilles pour modéliser les fibres dans la direction  $OY$

Les nœuds des éléments sont communs pour chacune des nappes d'armature.



### 3.1 Résultats modélisation A (écrouissage isotrope linéaire)

#### 3.1.1 Chargement thermique pour la modélisation A

Température de référence : 50

Histoire du chargement :  $Evolution_A$  (cf. [§1.4])

Les températures sont rentrées comme un champ aux nœuds.

#### 3.1.2 Résultats

On relève des valeurs de  $SIXX$  au nœud  $NO1$  (dans la direction des armatures longitudinales) et  $SIXX$  au nœud  $NO1$  (dans la direction des armatures transversales) et celles du Maximum et minimum des variables internes  $V1$  et  $V3$ .

SIXX dans les mailles modélisant les  
fibres orientées suivant OX

SIXX dans les mailles modélisant les  
fibres orientées suivant OY

Instant	Référence	Code_Aster	Ecart	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2,0000E+08	2,0000E+08	0	2,0000E+08	2,0000E+08	0
2	2,4000E+08	2,4000E+08	0	2,4000E+08	2,4000E+08	0
3	4,0000E+07	4,0000E+07	0	4,0000E+07	4,0000E+07	0
4	2,4000E+08	2,4000E+08	0	2,4000E+08	2,4000E+08	0
5	-1,6000E+08	-1,6000E+08	0	-1,6000E+08	-1,6000E+08	0
6	-3,1200E+08	-3,1200E+08	0	-3,1200E+08	-3,1200E+08	0
7	2,8800E+08	2,8800E+08	0	2,8800E+08	2,8800E+08	0
8	4,0960E+08	4,0960E+08	0	4,0960E+08	4,0960E+08	0
9	-2,7040E+08	-2,7040E+08	0	-2,7040E+08	-2,7040E+08	0
10	-5,2768E+08	-5,2768E+08	0	-5,2768E+08	-5,2768E+08	0
11	4,7232E+08	4,7232E+08	0	4,7232E+08	4,7232E+08	0

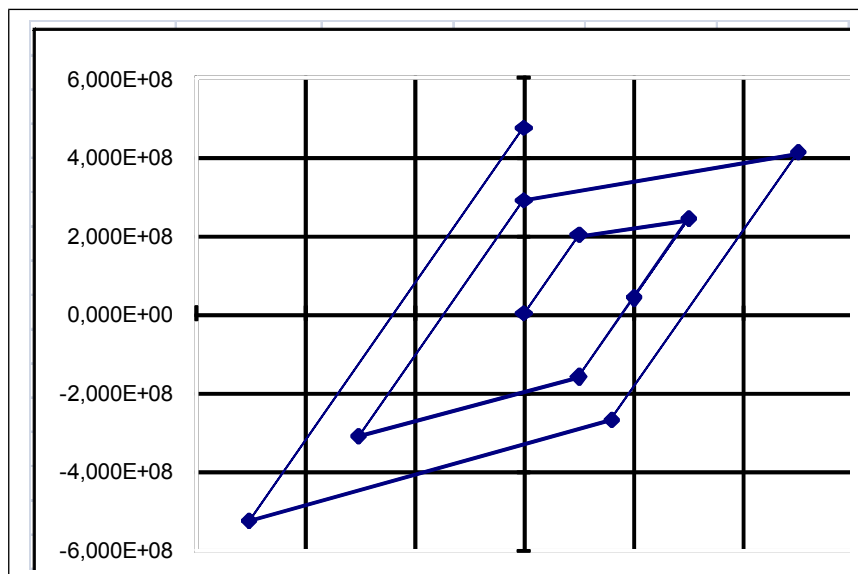
Instant	Variables internes	Minimum		Maximum	
		Code_Aster	Référence	Code_Aster	Référence
1	V1	0	0	0	0
	V3	0	0	0	0
2	V1	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
	V3	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
3	V1	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
	V3	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
4	V1	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
	V3	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
5	V1	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
	V3	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03	1.8E-03
6	V1	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03
	V3	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03
7	V1	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03
	V3	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03	5.04E-03
8	V1	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03
	V3	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03
9	V1	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03
	V3	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03	9.432E-03
10	V1	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02
	V3	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02
11	V1	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02
	V3	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02	1.47456E-02



## Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ref})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

Le cas test étudié correspond au schéma suivant dans un plan contrainte déformation :



## 4 Modélisation B

Cas avec écouissage cinématique linéaire.

### 4.1 Chargement thermique pour la modélisation B

Température de référence : 50°C

Histoire du chargement :  $Evolution_B$  (cf. [§1.4])

Les températures sont rentrées comme un champ aux nœuds.

### 4.2 Résultats

On relève les valeurs de  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (direction des armatures longitudinales) et  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (direction des armatures transversales)

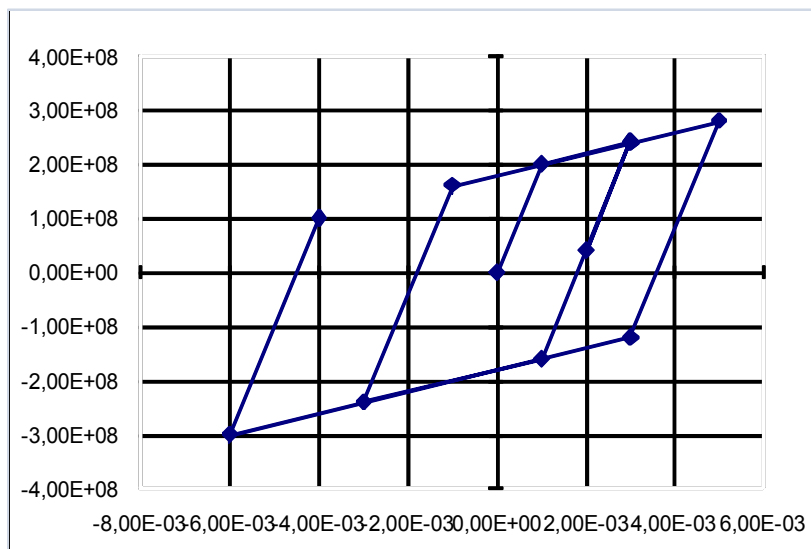
$SIXX$  dans les mailles modélisant les fibres orientées suivant  $OX$        $SIXX$  dans les mailles modélisant les fibres orientées suivant  $OY$

Instant	Référence	Code_Aster	Ecart	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2,00E+08	2,00E+08	0	2,00E+08	2,00E+08	0
2	2,40E+08	2,40E+08	0	2,40E+08	2,40E+08	0
3	4,00E+07	4,00E+07	0	4,00E+07	4,00E+07	0
4	2,40E+08	2,40E+08	0	2,40E+08	2,40E+08	0
5	-1,60E+08	-1,60E+08	0	-1,60E+08	-1,60E+08	0
6	-2,40E+08	-2,40E+08	0	-2,40E+08	-2,40E+08	0
7	1,60E+08	1,60E+08	0	1,60E+08	1,60E+08	0
8	2,80E+08	2,80E+08	0	2,80E+08	2,80E+08	0
9	-1,20E+08	-1,20E+08	0	-1,20E+08	-1,20E+08	0
10	-3,00E+08	-3,00E+08	0	-3,00E+08	-3,00E+08	0
11	1,00E+08	1,00E+08	0	1,00E+08	1,00E+08	0

#### Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ref})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

Le cas test étudié correspond au schéma suivant dans un plan contrainte déformation :



## 5 Modélisation C

Cas modèle de Pinto-Menegotto.

### 5.1 Chargement thermique pour la modélisation C

Température de référence : 50°C

Histoire du chargement :  $Evolution_C$  (cf. [§1.4])

Les températures sont rentrées comme un champ aux nœuds.

### 5.2 Résultats

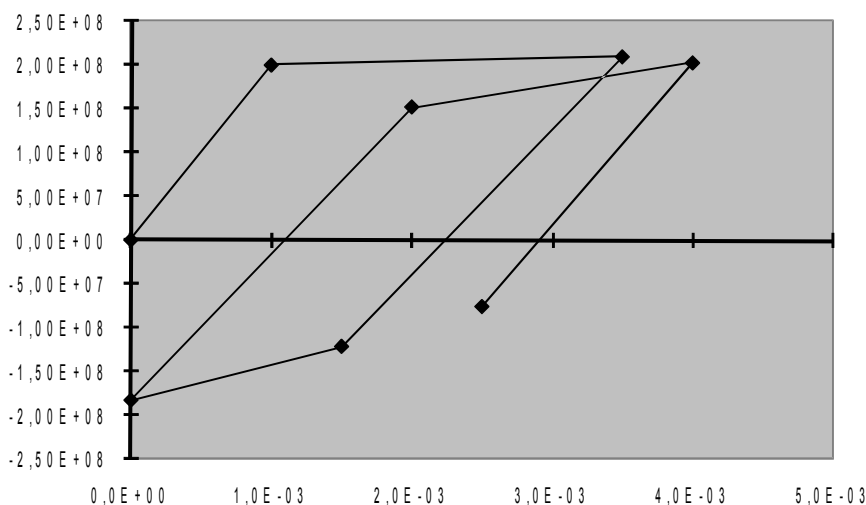
On relève les valeurs de  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (direction des armatures longitudinales) et  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (direction des armatures transversales)

Instant	$SIXX$ dans les mailles modélisant les fibres orientées suivant $OX$			$SIXX$ dans les mailles modélisant les fibres orientées suivant $OY$		
	Référence	Code_Aster	Ecart	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2.09416E+08	2.09416E+08	0	2.09416E+08	2.09416E+08	0
2	-1.21555E+08	-1.21555E+08	0	-1.21555E+08	-1.21555E+08	0
3	-1.82862E+08	-1.82862E+08	0	-1.82862E+08	-1.82862E+08	0
4	1.52164E+08	1.52164E+08	0	1.52164E+08	1.52164E+08	0
5	2.02506E+08	2.02506E+08	0	2.02506E+08	2.02506E+08	0
6	-7.59307E+07	-7.59307E+07	0	-7.59307E+07	-7.59307E+07	0

#### Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ref})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

Le cas test étudié correspond au schéma suivant dans un plan contrainte déformation :



## 6 Modélisation D

---

La modélisation D est la même que la modélisation C, à la différence que les températures sont définies par une carte.

Les résultats sont identiques.

## 7 Modélisation E

---

La modélisation E se rapproche de la modélisation D, à la différence qu'il n'y pas d'armature transversale.

### 7.1 Résultats

On relève les valeurs de  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (pas de test sur  $SIYY$  en l'absence d'armatures transversales car les contraintes sont uniquement calculées dans la direction principale des armatures)

$SIXX$			
Instant	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2.09416E+08	2.09416E+08	0
2	-1.21555E+08	-1.21555E+08	0
3	-1.82862E+08	-1.82862E+08	0
4	1.52164E+08	1.52164E+08	0
5	2.02506E+08	2.02506E+08	0
6	-7.59307E+07	-7.59307E+07	0

#### Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ref})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

## 8 Modélisation F

---

La modélisation F se rapproche de la modélisation A, à la différence qu'il n'y pas d'armature transversale.

### 8.1 Résultats

On relève les valeurs de  $SIXX$  au nœud  $NOI$  (pas de test sur  $SIYY$  en l'absence d'armatures transversales)

## SIXX

Instant	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2.00000E+08	2.00000E+08	0
2	2.40000E+08	2.40000E+08	0
3	4.00000E+07	4.00000E+07	0
4	2.40000E+08	2.40000E+08	0
5	-1.60000E+08	-1.60000E+08	0
6	-3.12000E+08	-3.12000E+08	0
7	2.88000E+08	2.88000E+08	0
8	4.09600E+08	4.09600E+08	0
9	-2.70400E+08	-2.70400E+08	0
10	-5.27680E+08	-5.27680E+08	0
11	4.72320E+08	4.72320E+08	0

### Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ref})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

## 9 Modélisation G

La modélisation G se rapproche de la modélisation B, à la différence qu'il n'y pas d'armature transversale.

### 9.1 Résultats

On relève les valeurs de *SIXX* au nœud *NOI* (pas de test sur *SIYY* en l'absence d'armatures transversales)

## SIXX

Instant	Référence	Code_Aster	Ecart
1	2,00E+08	2,00E+08	0
2	2,40E+08	2,40E+08	0
3	4,00E+07	4,00E+07	0
4	2,40E+08	2,40E+08	0
5	-1,60E+08	-1,60E+08	0
6	-2,40E+08	-2,40E+08	0
7	1,60E+08	1,60E+08	0
8	2,80E+08	2,80E+08	0
9	-1,20E+08	-1,20E+08	0
10	-3,00E+08	-3,00E+08	0
11	1,00E+08	1,00E+08	0

### Remarques :

Les résultats présentés sont donnés dans le repère de référence  $(X_{ref}, Y_{ef})$  faisant un angle de  $0^\circ$  par rapport à  $(X, Y)$ .

## 10 Modélisation H

La modélisation H est purement mécanique (application d'une force nodale sur  $NO2$  et  $NO3$ ). Il s'agit ici d'un cas test de non régression.

### 10.1 Résultats

On relève les valeurs de :  $SIXX$  au nœud  $NO2$   
-  $EXX$  au nœud  $NO2$

Instant	Référence	$SIXX$		$EXX$		Ecart
		Code_Aster	Écart	Référence	Code_Aster	
0.001	2E+08	2E+08	0	1E-03	1E-03	0
0.0023	2E+08	2E+08	0	2.3E-03	2.3E-03	0
0.03	2.58E+08	2.58E+08	0	3E-02	3E-02	0
0.2	1.93156E+08	1.93156E+08	0	2.96667E-02	2.96667E-02	0
0.4	-1.43311E+08	-1.43311E+08	0	2E-02	2E-02	0
6.4	-2.77424E+08	-2.77424E+08	0	-4E-02	-4E-02	0
7.92	1.01029E+08	1.01029E+08	0	-3.3E-02	-3.3E-02	0
17	2.1647E+08	2.1647E+08	0	1E-02	1E-02	0
19	2.571E+08	2.571E+08	0	3E-02	3E-02	0
20	2.17745E+08	2.17745E+08	0	2.98E-02	2.98E-02	0
21	-8.0318E+07	-8.0318E+07	0	2.6E-02	2.6E-02	0
22	-1.28487E+08	-1.28487E+08	0	2.2E-02	2.2E-02	0
25	2.04332E+08	2.04332E+08	0	2.5E-02	2.5E-02	0
50	2.97691E+08	2.97691E+08	0	5E-02	5E-02	0

## 11 Synthèse des résultats

---

Pour les comportements élasto-plastiques avec écrouissage linéaire, la solution analytique est parfaitement retrouvée.

Le comportement de Pinto-Menegotto est validé par non régression.