

## SSND105 - Loi de comportement visco-élasto-plastique avec effet de mémoire

---

### Résumé :

Le problème est quasi-statique non-linéaire en mécanique des structures. Les lois testées, `VMIS_CIN2_MEMO` et `VISC_CIN2_MEMO`, sont des lois avec écrouissage cinématique non-linéaire, écrouissage isotrope, et mémoire de l'écrouissage maximum. On analyse la réponse en un point matériel, avec un pré-écrouissage, puis un chargement cyclique.

La modélisation A permet de valider l'effet de mémoire avec `VMIS_CIN2_MEMO` dans un cas où l'écrouissage est purement isotrope, pour une traction simple. La solution de référence pour cette modélisation est analytique.

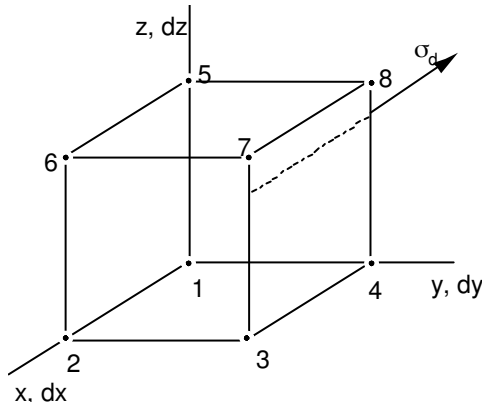
La modélisation B compare les résultats obtenus avec effet de mémoire, et sans effet de mémoire entre les lois `VISC_CIN2_MEMO` et `VISCOCHAB`, pour un chargement cyclique avec pré-écrouissage.

La modélisation C est similaire à la modélisation B, et permet de valider les deux modèles en axisymétrique.

La modélisation D est similaire à la modélisation C, et permet de vérifier que les modèles pouvant prendre en compte l'effet de non proportionnalité donnent dans ce cas des résultats identiques aux modèles précédents.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Face YZ : (1, 4, 5, 8)

Face XZ : (1, 2, 5, 6)

Face 1YZ : (2, 3, 6, 7)

Face 1XZ : (4, 3, 8, 7)

$\sigma_d$  : pression

### 1.2 Propriétés des matériaux

Élasticité isotrope  $E = 145\,000\text{ MPa}$   $\nu = 0.3$

Élasto-plasticité avec effet de mémoire (modélisation A) : modèle VISC\_CIN2\_MEMO

Écrouissage isotrope

R\_0 35 MPa B 12

Mémoire

MU 19 Q\_0 140 MPa

ETA 0.5 Q\_M 460 MPa

Écrouissage cinématique (modélisation A)

C1 0 G1\_0 0

C2 0 G2\_0 0

Viscoplasticité avec effet de mémoire (modélisations B et C) : modèle VISC\_CIN2\_MEMO

Paramètres identiques aux valeurs précédentes, sauf :

LEMAITRE

UN\_SUR\_K  $1/70(\text{MPa } S^{1/N})^{-1} = 0.0142857$  N 24

Écrouissage cinématique (modélisation B)

C1 1950 MPa G1\_0 50

C2 65000 MPa G2\_0 1300

Viscoplasticité modèle VISCOCHAB (modélisations B et C)

$k$	35 MPa	B	12	ETA	0.5	C2	65000 MPa
A_K	0	M_R	1	C1	1950 MPa	M_2	1
A_R	1	G_R	0	M_1	1	D2	1
K_0	$70\text{ MPa } S^{1/N}$	MU	19	D1	1	G_X2	0
N	24	Q_M	460	G_X1	0	G2_0	1300 MPa
ALP	0 MPa	Q_0	40 MPa	G1_0	50 MPa	A_I	1
		QR_0	200 MPa				

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

$$\begin{aligned} N6 & \quad dy = dz = 0 \\ N2 & \quad dy = 0 \\ FACE1YZ & \quad dx = 0 \end{aligned}$$

Traction (modélisation A) :  $FACEYZ \quad F_x = -0.25 \times coef \quad Coef = 120$  pour  $t = 8s$ .

Pré-écrouissage(modélisation B)  $FACEYZ \quad S_{xx} = 250 MPa \times coef2 \quad S_{xx} = 250 MPa \times coef2$   
 $coef2 = 1$  pour  $t = 10s$ , puis décharge ( $coef2 = 0$ ) pour  $t = 11s$ .

A partir de  $11s$ , 20 cycles en déformation imposée (+/- 0.5%)

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On peut calculer la solution analytique correspondant au pré-écrouissage (traction monotone, modélisation A) :

Le système d'équations du problème avec effet de mémoire s'écrit (20 équations) [R5.03.04] :

**Élasticité** :  $\tilde{\sigma} = 2\mu(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^p)$

$$\text{Critère de plasticité} \quad \left\| \tilde{\sigma} - \frac{2}{3}C_1\alpha_0 - \frac{2}{3}C_2\alpha_2 \right\|_{eq} = R_0 + R(p)$$

$$\text{Écoulement plastique} : \dot{\varepsilon}^p = \dot{p} \mathbf{n} \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma} - \frac{2}{3}C_1\alpha_0 - \frac{2}{3}C_2\alpha_0}{\left\| \tilde{\sigma} - \frac{2}{3}C_1\alpha_0 - \frac{2}{3}C_2\alpha_0 \right\|_{eq}}$$

**Écrouissage isotrope** :  $\dot{R} = b(Q - R)\dot{p}$

**Mémoire d'écrouissage maximal** :  $Q = Q_0 + (Q_m - Q_0)(1 - e^{-2\mu q})$

où  $q$  est déterminé par :

• un domaine  $F(\varepsilon^p, \xi, q) = \frac{2}{3}J_2(\varepsilon^p - \xi) - q \leq 0$  caractérisant les déformations plastiques maximales, dont  $q$  mesure le rayon et  $\xi$  le centre

•  $\xi$  est calculé suivant une loi de normalité c'est à dire :  $\dot{\xi} = \dot{q} \mathbf{n}^*$ , avec  $\mathbf{n}^* = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^p - \xi}{J_2(\varepsilon^p - \xi)}$

Sur la surface du domaine d'écrouissage maximal, on a  $F = 0$ . En appliquant la condition  $dF = 0$ , on obtient l'expression en vitesse :  $\dot{q} = \eta \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}^* \rangle \dot{p}$

Pour un point matériel en charge uni-axiale, les champs (uniformes) ont pour composantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^p = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, lors de la première charge uni-axiale dans la direction x :

$$\xi^- = 0$$

$$q^- = 0$$

$$\Delta q = \eta \varepsilon_x^p$$

Dans ce cas,  $q = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^p_{\max}$ , implique que  $\eta = \frac{1}{2}$ . Dans ce cas,  $\Delta \xi = \frac{1}{2} (\varepsilon^p)$

De plus, dans le cas d'un cycle de traction compression symétrique (en déformation plastique), on obtient, lors de la première décharge symétrique (avec  $\eta = \frac{1}{2}$ ) :

$$\xi^- = \frac{1}{2} \varepsilon^p_{\max}$$

$$q^- = \frac{1}{2} \varepsilon^p_{xx \max}$$

$$\Delta q = \eta \left[ \frac{2}{3} J_2(\varepsilon^p) - q^- \right] = \eta \left[ \varepsilon^p_{xx \min} - \xi^- \right] - \frac{1}{2} \varepsilon^p_{xx \max} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon^p_{xx \min} \right]$$

$$q = q^- + \Delta q = \varepsilon^p_{xx \max} = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon^p_{xx}$$

$$\Delta \xi = \frac{(1 - \eta) \Delta q (\varepsilon^p - \xi^-)}{\eta q^- + \Delta q} = -\frac{1}{2} \Delta \varepsilon^p_{xx \max}$$

$\xi = \xi^0 + \Delta \xi = 0$  ce qui correspond bien au résultat attendu (cf. [bib2]) : domaine  $F=0$  centré sur l'origine, et de rayon la demi-amplitude de déformation plastique.

Dans le cas d'une traction croissante, et si l'érouissage cinématique est négligé, les équations à résoudre deviennent :

$$\sigma \leq R_0 + R(p)$$

Il faut donc calculer la fonction  $R(p)$ , telle que :

$$dR = b(Q - R)dp \quad \text{avec } Q = Q_0 + (Q_m - Q_0)(1 - e^{-2\mu q})$$

De plus, on considère que l'on est en charge, donc  $F(\varepsilon^p, \xi, q) = 0$

$$dq = \eta dp$$

Il faut donc intégrer l'équation différentielle :

$$dR = b(Q_0 + (Q_m - Q_0)(1 - e^{-2\mu\eta}) - R)dp$$

ce qui s'intègre de la façon suivante :

$$dR + bR = 0 \Rightarrow R = \lambda e^{-bp}$$

Méthode de variation de la constante :  $R = \lambda(p)e^{-bp}$

$$d\lambda e^{-bp} = b(Q_m - (Q_m - Q_0)e^{-2\mu\eta p})dp$$

$$d\lambda = bQ_m e^{bp} dp + b(Q_0 - Q_m)e^{(b-2\mu\eta)p} dp$$

en intégrant :

$$\lambda = Q_m e^{bp} + \frac{b(Q_0 - Q_m)}{(b - 2\mu\eta)} e^{(b-2\mu\eta)p} + K$$

d'où

$$R(p) = Q_m + \frac{b(Q_0 - Q_m)}{(b - 2\mu\eta)} e^{-2\mu\eta p} + K e^{-bp}$$

La constante  $K$  est définie par les conditions initiales : pour  $p=0$ ,  $R=0$

$$0 = Q_m + \frac{b(Q_0 - Q_m)}{(b - 2\mu\eta)} + K \text{ soit } K = \frac{b(Q_m - Q_0)}{(b - 2\mu\eta)} - Q_m = \frac{-bQ_0 + 2\mu\eta Q_m}{(b - 2\mu\eta)}$$

Finalement :

$$R(p) = Q_m + \frac{b(Q_0 - Q_m)}{(b - 2\mu\eta)} e^{-2\mu\eta p} + \frac{2\mu\eta Q_m - bQ_0}{(b - 2\mu\eta)} e^{-bp}$$

On a donc en charge :  $\sigma = R_0 + R(p)$

## 2.2 Résultats de référence

**Modélisation A :**

Valeur de  $SIXX$  à l'instant final :  $\sigma = R_0 + R(p)$

$$\text{avec } R(p) = Q_m + \frac{b(Q_0 - Q_m)}{(b - 2\mu\eta)} e^{-2\mu\eta p} + \frac{2\mu\eta Q_m - bQ_0}{(b - 2\mu\eta)} e^{-bp}$$

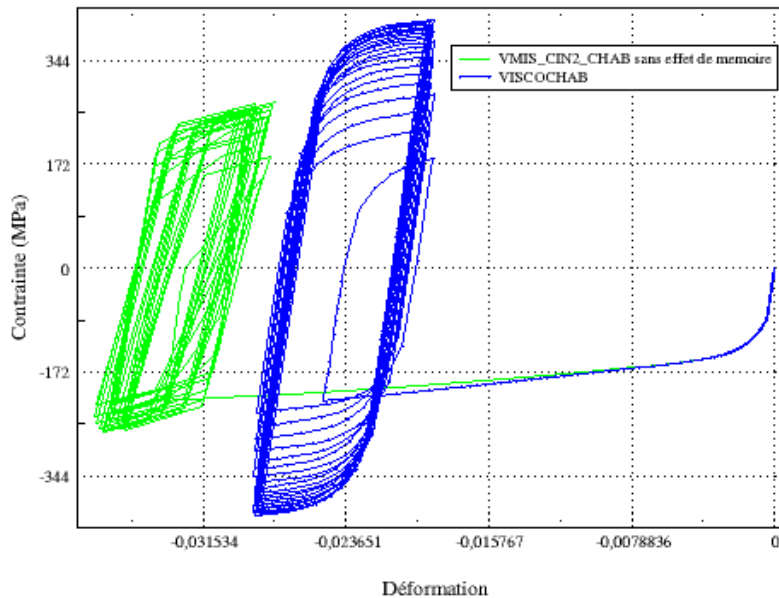
$t=8s$ , on doit retrouver  $SIXX = 120 \text{ Mpa}$ .

Pour cela on calcul  $R(p)$  à partir de la valeur de  $p$  à l'instant  $t=8s$ .

**Modélisation B :**

On comparera les résultats obtenues avec `VISC_CIN2_MEMO` avec ceux obtenus avec `VISCOCHAB`, à la fin du pré-écrouissage et au bout de 10 cycles. Les courbes ci-dessous mettent en évidence de l'effet de mémoire (par comparaison avec `VISC_CIN2_CHAB` qui ne le modélise pas) : après un pré-écrouissage, les cycles à déformation imposée se stabilisent à une amplitude de contraintes supérieure à celle obtenue sans effet de mémoire :

Essai cyclique DEPS= $\pm 0.5\%$



## 2.3 Incertitude sur la solution

- Modélisation A : analytique
- Modélisation B : inter-comparaison entre VISCOCHAB et VISC\_CIN2\_MEMO : précision de l'intégration numérique, estimée à moins de 1% .
- Modélisation C : validation des comportements en 2D AXIS ; les résultats doivent être identiques à ceux de la modélisation B.

## 2.4 Références bibliographiques

- [1] R5.03.04 « Comportements élasto-visco-plastiques de J.L.Chaboche ».
- [2] J.M.PROIX « Comportement viscoplastique prenant en compte la non proportionnalité du chargement » EDF R&D-CR-AMA12-284, 12/12/12

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 3D, 1 hexa8. Traction simple.

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	tolérance
$\sigma_{xx}$	120	0,20%
$p$	$3.70925 E - 2$	0,10%

## 4 Modélisation B

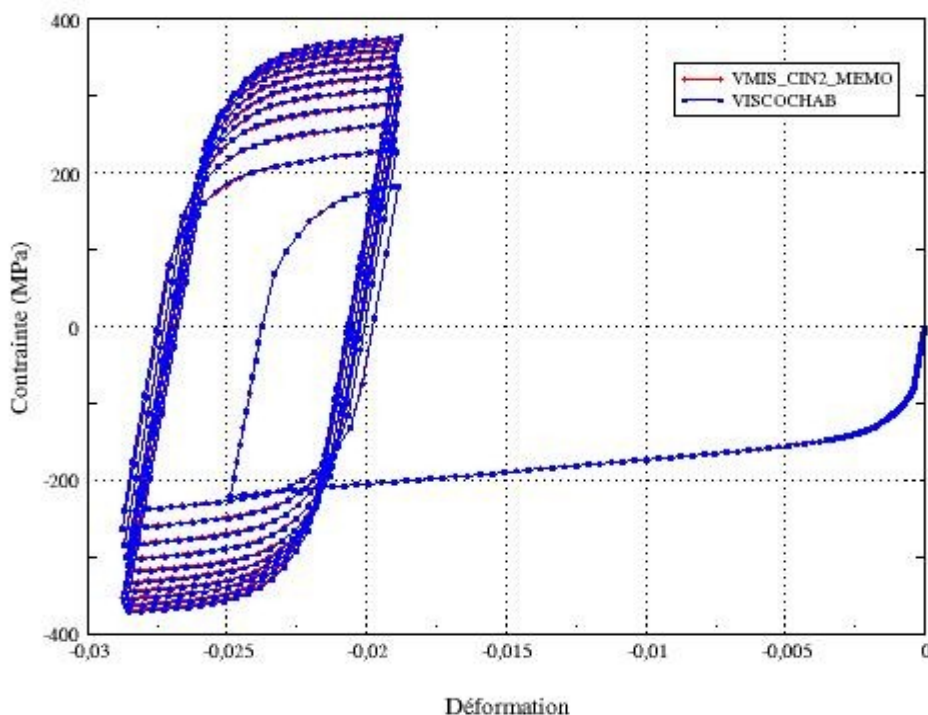
### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Pré-écrouissage en traction puis cycles à déformation imposée, comparaison VISCOCHAB et VISC\_CIN2\_MEMO. 250 pas de temps pour 10 cycles.

### 4.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	VISCOCHAB	VISC_CIN2_MEMO	% différence
$\sigma_{xx}$	10	220	220	0
$\sigma_{xx}$	11	0	0	0
$\sigma_{xx}$	113.5	$3.75459E + 02$	$3.72353E + 02$	-0.8
$\varepsilon_{xx}$	113.5	$-1.87638E - 02$	$-1.87638E - 02$	0

Essai cyclique DEPS=+/-0.5%



### 4.3 Remarques

La différence de 0.8% sur les contraintes à l'instant final s'estompe si on raffine le pas de temps : avec un pas de temps 2 fois plus fin, l'écart devient 0.4% .

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Pré-écrouissage en traction puis cycles à déformation imposée, comparaison VISCOCHAB et VISC\_CIN2\_MEMO. 250 pas de temps pour 10 cycles. Modélisation 2D AXIS.

### 5.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	VISCOCHAB	VISC_CIN2_MEMO	% différence
$\sigma_{xx}$	113.5	3.75459E+02	3.72353E+02	-0.8
$\varepsilon_{xx}$	113.5	-1.87638E-02	-1.87638E-02	

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation est identique à la modélisation C, avec des modèles de type NRAD ( non radialité ). Les résultats des modèles VISC\_MEMO\_NRAD et VISC\_CIN2\_NRAD peuvent être comparés à ceux de la modélisation C, puisque l'effet de non radialité doit être inopérant ici. Les tests de VMIS\_MEMO\_NRAD, VMIS\_CIN2\_NRAD (sans viscosité) sont de non régression.

### 6.2 Grandeurs testées et résultats

#### Comportement VISC\_MEMO\_NRAD

Identification	Instant	Référence VISC_CIN2_MEMO
$\sigma_{xx}$	113.5	369.679
$\varepsilon_{xx}$	113.5	-1.8773E-02

#### Comportement VISC\_CIN2\_NRAD

Identification	Instant	Référence VISC_CIN2_CHAB
$\sigma_{xx}$	113.5	269.6
$\sigma_{xx}$	10	220

#### Comportement VMIS\_MEMO\_NRAD

Identification	Instant	Référence
$\sigma_{xx}$	113.5	372.2 (non régression)
$\sigma_{xx}$	10	220 (analytique)

#### Comportement VMIS\_CIN2\_NRAD

Identification	Instant	Référence VISC_CIN2_MEMO
$\sigma_{xx}$	113.5	225.254 (non régression)
$\sigma_{xx}$	10	220 (analytique)

## 7 Synthèse des résultats

Les quatre modélisations permettent de valider, sur un point matériel, les comportements de type cinématique non linéaire à effet de mémoire, en plasticité et en viscoplasticité.



