

## HPLV101 - Homogénéisation d'un matériau homogène

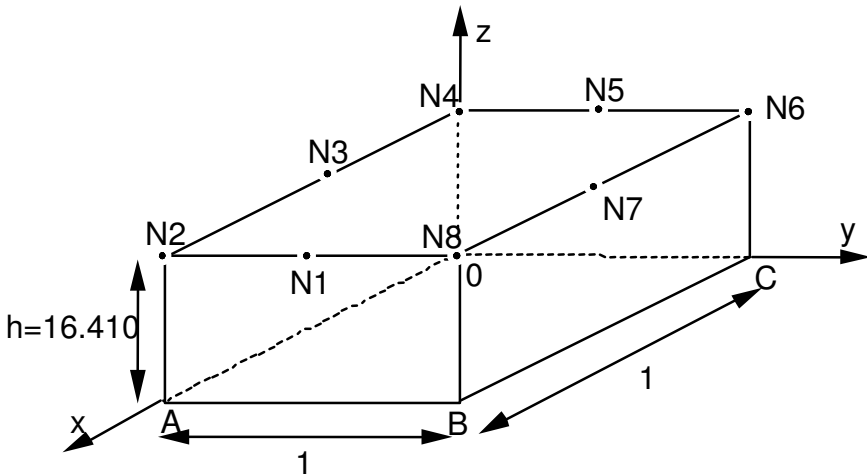
---

### Résumé :

Ce test éprouve, dans une situation triviale où le matériau est homogène, la résolution des problèmes thermiques et mécaniques stationnaires, avec des chargements correspondant à un gradient de température et à une déformation imposée, voisins de ceux correspondant aux problèmes élémentaires de la méthode d'homogénéisation périodique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



	x	y	z
N4	0	0	16.410
N8	1.	1.	16.410
N3	0.5	0	16.410

### 1.2 Propriétés de matériaux

#### Modélisation A

$$E = 1.0 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$k = 1.0 \text{ W l(m. } ^\circ\text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J l(} ^\circ\text{C.m}^3\text{)}$$

On teste la plasticité et la compatibilité de MFront avec Deborst (contraintes planes)

#### Modélisation B

$$E_L = 1.0 \text{ MPa}$$

$$E_T = 0.9 \text{ MPa}$$

$$E_N = 0.8 \text{ MPa}$$

$$\nu_{LT} = 0.1$$

$$\nu_{LN} = 0.25$$

$$\nu_{TN} = 0.3333333$$

$$k = 1.0 \text{ W l(m. } ^\circ\text{C)}$$

$$C_p = 0 \text{ J l(} ^\circ\text{C.m}^3\text{)}$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Mécanique 3D :
  - Plan  $z=0$  :  $dz=0$  pour le chargement membranaire ;  
 $dx=0, dy=0$  pour le chargement de flexion
  - Plans  $y=0, y=1$  :  $dy=0$
  - Plans  $x=0, x=1$  :  $dx=0$
  - Nœud :  $O$   $dz=0$  (pour le seul chargement de flexion)

Chargement :

déformation membranaire:  $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

flexion uniforme imposée:  $E = \begin{pmatrix} \frac{z}{z_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$z_0 = 1 \text{ m}$

- Mécanique 2D, contraintes planes :

Axe :  $x=0$   $dx=0$  (ces conditions ne correspondent pas à l'application de la  
Nœud :  $O$   $dy=0$  méthode d'homogénéisation).

Chargement : déformation  $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  uniforme imposée

- Thermique 3D et 2D :

Plan  $x=0$   $temp=0$  (cette condition ne correspond pas à l'application de la  
méthode d'homogénéisation).

Chargement : gradient  $G = (-1,0,0)$  uniforme imposé.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

- En thermique : on résout le problème thermique stationnaire :

$$\int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \quad \forall \theta \in V, \quad \text{avec } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque :**

Les conditions aux limites choisies ici ne sont pas celles nécessaires à la méthode d'homogénéisation : on trouverait en effet  $T = 0$  partout.

La solution est alors (vérifiant les conditions définies en [§1.3]) :  $T(x, y, z) = -x$

L'énergie potentielle est alors à l'équilibre :  $W^{th} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T = -\frac{1}{2} |\Omega|$  ici

- En mécanique : on résout le problème d'élastostatique :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},$$

pour les cas :

chargement 3D membranaire	chargement 3D de flexion	chargement 2D contraintes planes
$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les solutions sont :

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité isotrope:  $\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\nu z}{(1-\nu)} \end{pmatrix}$

l'énergie potentielle à l'équilibre est :

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu)$$

- en 3D, chargement **membranaire** et élasticité orthotrope:  $\mathbf{u}(x, y, z) = (0, 0, -\beta z)$  avec  $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

soit  $\beta = \frac{E_N}{E_L} (\nu_{LN} + \nu_{LT} \nu_{TN})$   
 $1 - \frac{E_N}{E_T} \nu_{TN}^2$  car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33}$$

$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 3D, chargement de **flexion** :  $\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{+\nu z^2}{2z_0(1-\nu)} \end{bmatrix}$  ;

$$W^{pot} = -\begin{bmatrix} \nu \\ 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \frac{|\Omega|}{2} (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{h^2}{3z_0^2}$$

- en 3D, chargement **de flexion** et élasticité orthotrope:  $\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \frac{z}{L} \end{bmatrix}$  avec  $\beta = \frac{C_{13}}{C_{33}}$

$$\text{soit } \beta = \frac{\frac{E_N}{E_L}(\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{1 - \frac{E_N}{E_T}\nu_{TN}^2}$$

car le repère local n'est pas confondu avec le repère global (les angles nautiques valant tous 90°).

$$W^{pot} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A} \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) = -\beta^2 \cdot \frac{|\Omega|}{2} C_{33} \frac{h^2}{3z_0^2}$$

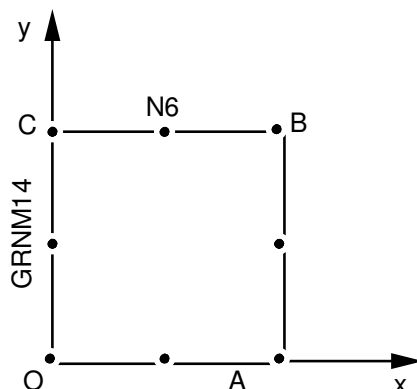
$$\text{où } C_{33} = \frac{1 - \nu_{NT}\nu_{TN}}{E_T E_N \Delta} \text{ et } \Delta = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL} - \nu_{LN}\nu_{NL} - \nu_{TN}\nu_{NT} - 2\nu_{LT}\nu_{TN}\nu_{NL}}{E_L E_T E_N}$$

- en 2D, chargement plan :  $\mathbf{u}(x, y) = (-x, 0)$  ;

$$W^{pot} = \frac{-|\Omega|}{2(1-\nu^2)}$$

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation



Conditions aux limites et chargement :

Thermique :                   GROUP\_NO : GRNM14 : TEMP : 0.0  
                                  PRE\_GRAD\_TEMP : FLUX\_X : -1.0

Mécanique :                   GROUP\_NO : GRNM14 : DX : 0.0  
(contraintes planes)  
                                  NOEUD :        O            DY : 0.0  
                                  PRE\_EPSI : EPXX : -1.0

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8

### 3.3 Valeurs testées

Point	Grandeur	Référence
<i>CMP</i>		
<i>A</i>	<i>TEMP</i>	-1.0000
<i>A</i>	<i>DX</i>	-1.0000
<i>N6</i>	<i>DX</i>	-0.5000

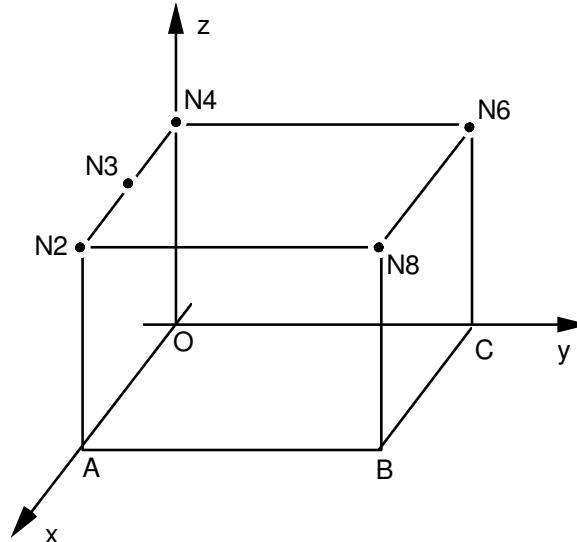
Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
<i>MI</i>	Thermique	-0.500000000
<i>MI</i>	Mécanique	-0.549450550

### 3.4 Remarques

Code\_Aster fournit la valeur de l'énergie de déformation, égale à l'opposé de l'énergie potentielle à l'équilibre (cas élastique).

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



Nom des mailles des faces :	ZEGAL0	YEGAL0	YEGAL1	XEGAL0	XEGAL1
Sommets :	BCOA	OAN2N4	BCN6N8	CON4N6	ABN8N2

Conditions aux limites :

```

Thermique :      ZERO : DEFI_CONSTANTE (VALE : 0.0) ;
                  FCT1:DEFI_FONCTION(Nom_para:'Z',VALE: (0.0 0.0 1.0 1.0));
                  GROUP_NO : XEGAL0 : TEMP : 0.0
                  PRE_GRAD_TEMP : FLUX_X : -1.0
Mécanique :      GROUP_NO : YEGAL0 : DY = 0.0
                  XEGAL1 : DX = 0.0
                  YEGAL1 : DY = 0.0
                  XEGAL0 : DZ = 0.0
Cas membranaire : GROUP_NO : ZEGAL0 : DZ = 0.0
                  PRE_EPSI : EPXX : -1.0
Cas flexion :    GROUP_NO : ZEGAL0 : DX = ZERO,  DY = ZERO
                  NOEUD : 0                      DZ = ZERO
                  PRE_EPSI :                      EPXX : FCT1
    
```

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20  
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 4.3 Valeurs testées

En élasticité isotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	<i>temp</i>	N8	-1.000000
	<i>temp</i>	N3	-0.500000
Mécanique membrane	<i>dz</i>	N4	-7.03285714
	<i>dz</i>	N8	-7.03285714
Mécanique	<i>dz</i>	N4	57.70459285

---

flexion	<i>dz</i>	<i>N8</i>	57.70459285
---------	-----------	-----------	-------------

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
<i>MI</i>	Thermique	-8.20500
<i>MI</i>	Mécanique Membrane Flexion	-2.0287088 -1.8210238 10 <sup>2</sup>

En élasticité orthotrope

Cas	Grandeur	Point	Référence
Thermique	<i>temp</i>	<i>N8</i>	-1.000000
	<i>temp</i>	<i>N3</i>	-0.500000
Mécanique	<i>dz</i>	<i>N4</i>	- 6.63044894
membrane	<i>dz</i>	<i>N8</i>	- 6.63044894
Mécanique	<i>dz</i>	<i>N4</i>	54.40283358
flexion	<i>dz</i>	<i>N8</i>	54.40283358

Maille	Energie potentielle à l'équilibre	Référence
<i>MI</i>	Thermique	-8.20500



## 5 Synthèse des résultats

---

Les résultats sont exacts à des erreurs d'arrondi près, puisque les solutions cherchées font partie de l'espace des éléments finis choisis pour la modélisation.