

HSNV120 - Traction hyperélastique d'un barreau sous chargement thermique

Résumé :

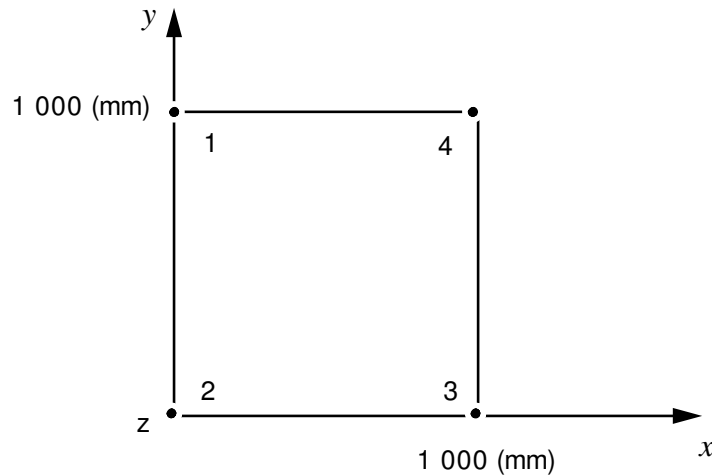
Ce test thermomécanique quasi-statique consiste à chauffer uniformément un barreau parallélépipédique, le soumettre à une traction importante pour finalement le laisser revenir dans un état déchargé. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyperélastiques (commande `STAT_NON_LINE`, mot-clé `COMPORTEMENT`) pour une relation de comportement élastique non-linéaire (`ELAS_VMIS_LINE` et `ELAS_VMIS_TRAC`) avec chargement thermique.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (`HEXA20`, modélisation A) ou bien quadrangulaire (`QUAD8`, hypothèse des contraintes planes, modélisation B).

Les résultats obtenus par *Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

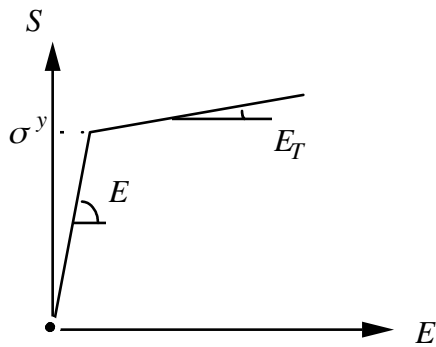
1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau obéit à une loi de comportement hyperélastique non linéaire isotrope à écouissage linéaire isotrope.



$$E = 2.10^5 \text{ MPa}$$

$$E_T = 2.10^3 \text{ MPa}$$

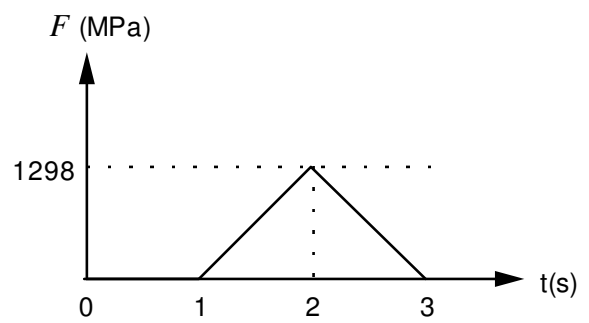
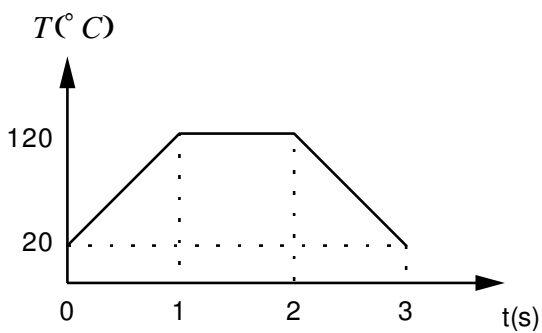
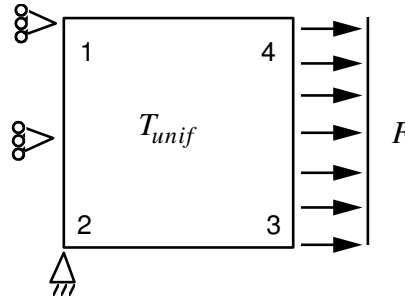
$$\sigma^y = 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\alpha = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau bloqué dans la direction Ox sur la face [1,2] est soumis à une température uniforme T et un effort de traction F réparti sur la face [3,4]. Les séquences de chargement sont les suivantes :



Température de référence : $T_{réf} = 20^\circ C$.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On cherche le champ de déplacement U sous la forme :

$$U(x, y, z) = \begin{pmatrix} ux \\ vy \\ vz \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation, la déformation et sa part mécanique sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1+v & 0 \\ 0 & 0 & 1+v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} \frac{u(u+2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v(v+2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v(v+2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{E} - \alpha \Delta T \mathbf{1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u(u+2)}{2} - \alpha \Delta T \\ \frac{v(v+2)}{2} - \alpha \Delta T \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$|(E^m)_{eq}| = |a - b| = a - b \quad (\text{on suppose que } a > b)$$

La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{cases} S_{xx} = K(a+2b) + \frac{2}{3}G(a-b) \\ S_{yy} = S_{zz} = K(a+2b) - \frac{1}{3}G(a-b) \end{cases}$$

avec :

$$3K = \frac{E}{1-2\nu} \quad \text{module de compressibilité}$$

Pour déterminer G en tenant compte de l'écouissage linéaire, on introduit :

- le module de cisaillement : $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$
- le module d'écouissage : $R' = \frac{E E_T}{E - E_T}$,

La "pseudo variable interne" p vaut alors :

$$p = \frac{2\mu(\mathbf{E}^m)_{eq} - \sigma^y}{R' + 3\mu} = \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu}$$

Finalement, G s'écrit :

$$G = \frac{\sigma^y + R' p}{a-b}$$

En tenant compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} S_{xx} = \frac{F}{1+u} & \text{(charge morte)} \\ S_{yy} = 0 & \text{(bord libre)} \end{cases}$$

Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} K(a+2b) + \frac{2}{3}\sigma^y + R' \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu} = \frac{F}{1+u} \\ K(a+2b) - \frac{1}{3}\sigma^y + R' \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu} = 0 \end{cases}$$

Il s'écrit aussi :

$$\begin{cases} 3K(a+2b) = \frac{F}{1+u} \\ 2\mu(a-b) = \frac{F}{1+u} \left[1 + \frac{3\mu}{R'} \right] - \sigma^y \frac{3\mu}{R'} \end{cases}$$

A F fixé, il s'agit donc d'un système non linéaire en u et v , puisque a est quadratique en u et b quadratique en v .

Néanmoins, on peut choisir de fixer u (donc a) et résoudre un système linéaire en F et b (duquel on déduit p et v) :

- $a = \frac{u(u+2)}{2} - \alpha \Delta T$
- $\frac{1}{1+u} F - 6Kb = 3Ka$
- $\left[1 + \frac{3\mu}{R'} \right] \frac{1}{1+u} F + 2\mu b = 2\mu a + \sigma^y \frac{3\mu}{R'}$
- $p = \frac{2\mu(a-b) - \sigma^y}{R' + 3\mu}$
- $v = \sqrt{1 + 2(b + a \Delta T)} - 1$

Il reste alors à exprimer la contrainte de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{F})} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$$

Soit ici :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{1+u}{(1+v)^2} S_{xx} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

Quant à la force exercée sur la face [3,4], du fait de l'hypothèse de charges mortes, elle s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x = F S_o & \text{où } S_o : \text{surface initiale de la face [3,4]} \\ \mathbf{F}_y = 0 \\ \mathbf{F}_z = 0 \end{cases}$$

2.2 Résultats de référence

On adoptera comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy et la force exercée sur la face [3,4] (en 3D seulement) :

Au temps $t=2$ s ($\Delta T=100^\circ C$, traction F)

En fait, on cherche F tel que l'allongement :

$$u = 0,1$$

- $K=166\,666$ MPa $\mu=76\,923$ MPa $R'=2\,020$ MPa
- $a=0.095$

$$\begin{cases} 0.90909 F - 10^6 b = 47\,500 \\ 104.76 F + 153.85 \cdot 10^3 b = 128.85 \cdot 10^3 \end{cases}$$

- $\Rightarrow \begin{cases} F = 1\,298$ MPa
 $b = -0.046$

$$\Rightarrow \begin{cases} F = 1\,298 \text{ MPa} \\ b = -0.046 \end{cases}$$

- $p = 8.91 \cdot 10^{-2}$

- $v = -3.70 \cdot 10^{-2}$

- $\begin{matrix} \sigma_{xx} = 1\,399.66 \text{ MPa} & \sigma_{xy} = 0 & F_x = 1\,298 \cdot 10^9 \text{ N} \\ \sigma_{yy} = 0 & \sigma_{xz} = 0 & F_y = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 & \sigma_{yz} = 0 & F_z = 0 \end{matrix}$

Au temps $t=3$ s ($\Delta T=0$, $F=0$)

Le barreau est revenu dans son état initial :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \\ p = 0 \end{cases}$$

2.3 Incertitude sur la solution

La solution est analytique. Aux erreurs d'arrondis près, on peut la considérer exacte.

2.4 Références bibliographiques

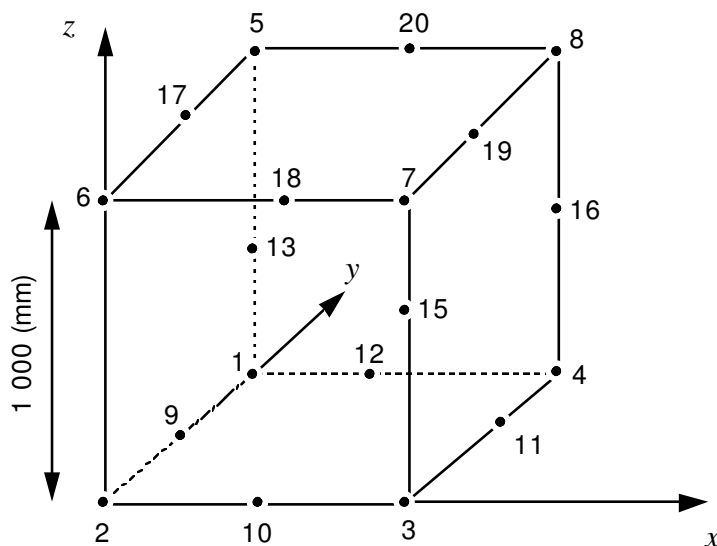
On pourra se référer à :

- 1) E. LORENTZ : Une relation de comportement hyperélastique non linéaire - Note interne EDF DER HI-74/95/011/0

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA20
1 maille QUAD8



Conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 N2 : U_x = U_y = U_z = 0 & \quad N9, N13, N14, N5, N17 : \\
 N1 : U_x = U_z = 0 & \quad U_x = 0 \\
 N6 : U_x = U_y = 0 &
 \end{aligned}$$

Charge : Traction sur la face [3 4 8 7 11 16 19 15]

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20
1 QUAD8

3.3 Grandeurs testées et résultats

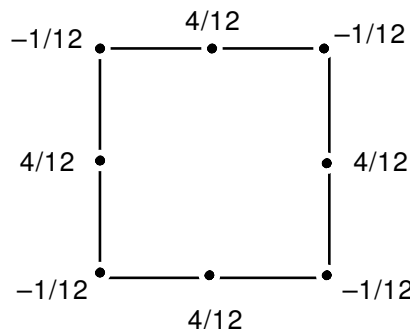
Identification	Référence
$t=2$ Déplacement DX ($N8$)	100
$t=2$ Déplacement DY ($N8$)	-37
$t=2$ Déplacement DZ ($N8$)	-37
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	1399.66
$t=2$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	11013.986
$t=2$ Contraintes $SIGZZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGXZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Contraintes $SIGYZ$ ($PG1$)	0
$t=2$ Variable P $VARI$ ($PG1$)	8.9110^{-2}
$t=3$ Déplacement DX ($N8$)	0
$t=3$ Déplacement DY ($N8$)	0
$t=3$ Déplacement DZ ($N8$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGZZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGXZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Contraintes $SIGYZ$ ($PG1$)	0
$t=3$ Variable P $VARI$ ($PG1$)	0
$t=2$ Force nodale DX ($N8$)	-1.081710 ⁸
$t=2$ Force nodale DY ($N8$)	0
$t=2$ Force nodale DZ ($N8$)	0

3.4 Remarques

Calcul de la force nodale :

La force appliquée sur la face [3,4], F_x , se répartit entre les différents nœuds suivant la pondération suivante :

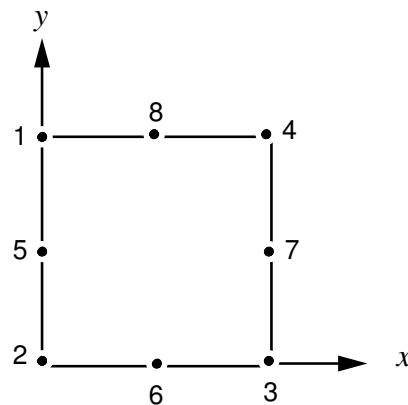
- nœuds sommets : $-1/12 F_x$
- nœuds milieux : $4/12 F_x$



4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D contraintes planes : 1 maille QUAD8
1 maille SEG3



Conditions aux limites :

$$N2 : \quad U_x = 0 \quad U_y = 0$$

$$N1 : \quad U_x = 0$$

$$N5 : \quad U_x = 0$$

Chargement :

Traction sur la face [3 4 7] (maille SEG3)

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles : 2

1 QUAD8

1 SEG3

4.3 Grandeurs testées et résultats

	Identification	Référence
$t=2$	Déplacement DX ($N4$)	100
$t=2$	Déplacement DY ($N4$)	-37
$t=2$	Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	1399.66
$t=2$	Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=2$	Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=2$	Variable P $VARI$ ($PG1$)	8.9110^{-2}
$t=3$	Déplacement DX ($N4$)	0
$t=3$	Déplacement DY ($N4$)	0
$t=3$	Contraintes $SIGXX$ ($PG1$)	0
$t=3$	Contraintes $SIGYY$ ($PG1$)	0
$t=3$	Contraintes $SIGXY$ ($PG1$)	0
$t=3$	Variable P $VARI$ ($PG1$)	0

5 Synthèse des résultats

Les résultats numériques et analytiques coïncident remarquablement. On peut toutefois s'étonner du temps d'exécution notoirement plus long pour la modélisation en contraintes planes (123,8 s) que pour le 3D (47,2 s). La différence s'explique par une discrétisation en temps beaucoup plus fine pour les contraintes planes, liée à des problèmes de convergence (l'algorithme de résolution de l'équation scalaire non linéaire en P est encore rudimentaire).