WTNL102 - Problème mono dimensionnel de convection forcée

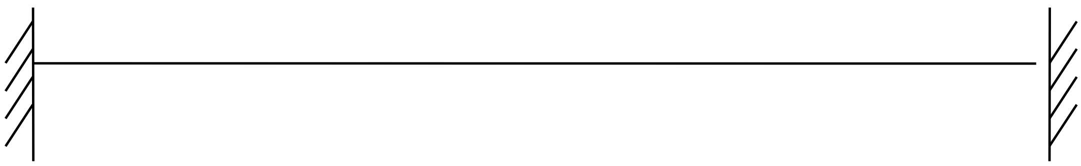
Résumé :

Il s'agit du transport mono dimensionnel de la chaleur par un flux de vitesse constante. Le régime hydraulique est caractérisé par une pression linéaire en espace. La solution de référence est analytique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On se place dans le cadre d'un problème mono dimensionnel en coordonnées cartésiennes. La « structure » considérée, est finalement un segment de longueur 1



$x=0 \begin{cases} p=P \\ T=0 \end{cases}$ $x=1 \begin{cases} p=0 \\ T=1 \end{cases}$

1.2 Conditions aux limites et chargements

On impose une pression variant linéairement de P en $x=0$ à 0 en $x=1$: $p(x)=P(1-x)$

En $x=0$: la température est imposée nulle
En $x=1$: la température est imposée à 1.

1.3 Conditions initiales

$T(x)=0$ partout
On s'intéresse au régime permanent

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

On part de l'équation de l'énergie [éq 3.1.3-1] du document [R7.01.11], qui dans le cas présent donne :

$$h\dot{m} + \dot{Q}' + Div(h\mathbf{M}) + Div(\mathbf{q}) = 0 \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Dans laquelle h désigne l'enthalpie de l'eau, $\mathbf{M}$ son flux massique, m l'apport massique en eau et $\mathbf{q}$ le flux de chaleur.

Compte tenu des hypothèses faites, on voit facilement que :

$$\mathbf{M} = M_x = \rho_w \lambda_h P \qquad \text{éq 2.1-2}$$

$$h = C_w^p T \qquad \text{éq 2.1-3}$$

$$\mathbf{q} = q_x = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{éq 2.1-4}$$

$$\dot{Q}' = \rho_w C_w^p \dot{T} \qquad \text{éq 2.1-5}$$

λ_T est le coefficient de diffusion thermique, $\lambda_h = \dfrac{K_{\text{int}}}{\mu_w}$ est le coefficient de diffusion hydraulique, K_{int} la perméabilité intrinsèque, ρ_w, μ_w, C_w^p sont respectivement la masse volumique, la viscosité et la chaleur calorifique à pression constante de l'eau.

En reportant [éq 2.1-2], [éq 2.1-3], [éq 2.1-4] et [éq 2.1-5] dans [éq 2.1-1] on trouve :

$$\frac{\rho_w C_w^p}{\lambda_T} \dot{T} + \rho_w C_w^p \frac{\lambda_h}{\lambda_T} P \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{éq 2.1-6}$$

On pose :

$$R = \rho_w C_w^p \frac{\lambda_h}{\lambda_T} P$$

et

$$S = \frac{\rho_w C_w^p}{\lambda_T}$$

On obtient

$$S\dot{T} + R \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{éq 2.1-7}$$

2.2 Résultats de référence

Afin d'obtenir plus rapidement le régime permanent, on choisit des coefficients tels que :

$$\frac{S}{R} = \frac{1}{\lambda_h P} \ll 1$$

La solution de [éq 2.1-7] est alors :

$$T = \frac{e^{Rx} - 1}{e^R - 1}$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

On fait une modélisation à 500 éléments, chaque élément a donc une longueur $h=\frac{1}{500}$.

On choisit les coefficients :

ρ_w	1
C_w^p	1
μ_w	1
K_{int}	100
λ_T	10
P	1

Ces valeurs conduisent à un nombre de Peclet $R=10$ et à un nombre de Peclet local $Rh=\frac{1}{50}$.

3.2 Résultats

X	Température de référence	Température *Aster*	Erreur relative ($\%$)
6,00E-01	0,0182710686	0,0182567	0,079%
7,00E-01	0,0497439270	0,0497269	0,034%
8,00E-01	0,1352960260	0,1352760	0,015%
9,00E-01	0,3678507400	0,3678309	0,005%
1,00E+00	1,0000000000	1,0000000	0,0%

4 Synthèse des résultats

Un bon accord est obtenu entre les températures calculées par *Code_Aster* et les valeurs de référence.