Algorithme de thermique linéaire transitoire

Résumé :

On présente l'algorithme de thermique transitoire linéaire implanté au sein de la commande THER_LINEAIRE [U4.33.01] . Les différentes options de calcul nécessaires ont été présentées dans les éléments de structure plans, axisymétriques et tridimensionnels [U1.22.01], [U1.23.01] et [U1.24.01].

Table des Matières

1 Expression de l'équation de la chaleur en thermique linéaire.....3
1.1 Equation de la chaleur.....3
1.2 Loi de FOURIER.....3
1.3 Equation de la chaleur dans le cas du modèle de thermique linéaire.....3
2 Conditions aux limites, chargement et condition initiale.....4
2.1 Températures imposées.....4
2.2 Relations linéaires.....4
2.3 Flux normal imposé.....4
2.4 Echange.....5
2.5 Echange paroi.....5
2.6 Source volumique.....5
2.7 Condition initiale.....5
3 Formulation variationnelle du problème.....6
4 Formulation variationnelle du problème avec condition d'échange entre deux parois.....6
5 Discrétisation en temps de l'équation différentielle.....7
5.1.1 Précision de la méthode.....7
5.1.2 Stabilité de la méthode.....8
5.1.3 Application à l'équation de la chaleur.....9
6 Discrétisation spatiale.....10
7 Implémentation dans Code_Aster.....11
7.1 Equations introduites.....11
7.2 Principales options thermiques calculées dans Code_Aster.....12
7.2.1 Conditions aux limites et chargements.....12
7.2.2 Calcul des matrices élémentaires et terme transitoire.....12
8 Description des versions du document.....12

1 Expression de l'équation de la chaleur en thermique linéaire

1.1 Equation de la chaleur

On se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière régulière Γ .
En tout point de Ω , l'équation de la chaleur peut s'écrire :

$$-\operatorname{div}(\mathbf{q}(r,t))+s(r,t)=\rho C_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

avec :

$\mathbf{q}$	vecteur flux de chaleur (dirigé suivant les températures décroissantes),
s	chaleur par unité de volume dissipée par les sources internes,
ρC_p	chaleur volumique à pression constante,
T	température,
r	variable d'espace,
t	variable temps.

Cette équation traduit le phénomène d'évolution de la température (uniquement à travers le phénomène de diffusion, la convection ayant été négligée) en tout point de l'ouvert et à tout instant. Elle admet en principe une infinité de solutions, mais la donnée des conditions initiales et de la variation des conditions aux limites au cours du temps détermine parfaitement l'évolution du phénomène.

1.2 Loi de FOURIER

En conduction thermique, la loi de FOURIER fournit une équation reliant le flux de chaleur au gradient de la température (vecteur normal à la surface isotherme). Cette loi fait apparaître, dans sa forme la plus générale, un tenseur de conductivité. Dans le cas d'un matériau isotrope, ce tenseur se réduit à un simple coefficient λ , le coefficient de conductivité thermique.

$$\mathbf{q}(r,t)=-\lambda \nabla T(r,t)$$

Pour les éléments de thermique anisotrope on se reportera à Implantation des éléments 2D et 2D-Axisymétrique en mécanique et en thermique [R3.06.02].

1.3 Equation de la chaleur dans le cas du modèle de thermique linéaire

En combinant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$-\operatorname{div}(-\lambda \nabla T(r,t))+s(r,t)=\rho C_p \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$

2 Conditions aux limites, chargement et condition initiale

On décrit ici uniquement les conditions aux limites thermiques conduisant à des équations linéaires en température, ce qui exclut les conditions de type rayonnement.

2.1 Températures imposées

Les conditions de type Dirichlet, sont traitées habituellement par dualisation dans *Code_Aster* (cf [R3.03.01]), mais elles peuvent aussi être éliminées dans certains cas (charges cinématiques).

$$T(r,t)=T_1(r,t) \quad \text{sur } \Gamma_1$$

où $T_1(r,t)$ est une fonction de la variable d'espace et/ou du temps.

2.2 Relations linéaires

Ce sont des conditions de type Dirichlet, permettant de définir une relation linéaire entre les valeurs de la température :

- entre deux ou plusieurs noeuds : avec une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i(r,t)=\beta(t)$$

- entre des couples de noeuds : avec une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{1\mathrm{i}} T_{i/\Gamma_{12}}(r,t)+\sum_{i=1}^{n_2} \alpha_{2\mathrm{i}} T_{i/\Gamma_{21}}(r,t)=\beta(t)$$

où Γ_{12} et Γ_{21} sont deux sous-parties de la frontière dont on lie deux à deux les valeurs de la température. Ce type de condition aux limites permet de définir des conditions de périodicité.

2.3 Flux normal imposé

Ce sont des conditions de type Neumann, définissant le flux entrant dans le domaine.

$$-\mathbf{q}(r,t).\mathbf{n}=f(r,t) \quad \text{sur } \Gamma_2$$

où $f(r,t)$ est une fonction de la variable d'espace et/ou de temps et $\mathbf{n}$ désigne la normale à la frontière Γ_2 .

2.4 Echange

Ce sont des conditions de type Neumann modélisant les transferts convectifs sur les bords du domaine.

$$-\mathbf{q}(r,t).\mathbf{n}=h(r,t)(T_{ext}(r,t)-T(r,t)) \quad \text{sur } \Gamma_3$$

où $T_{ext}(r,t)$ est une fonction de la variable d'espace et/ou de temps représentant la température du milieu extérieur, et $h(r,t)$ est une fonction de la variable d'espace et/ou de temps représentant le coefficient d'échange convectif sur la frontière Γ_3 .

2.5 Echange paroi

Ce sont des conditions de type Neumann mettant en jeu deux sous parties de la frontière en vis à vis. Ce type de condition aux limites modélise une résistance thermique d'interface.

$$\lambda\frac{\partial T_1}{\partial n_1}=h(r,t)(T_2(r,t)-T_1(r,t)) \text{ sur } \Gamma_{12} \qquad n_1 \text{ normale extérieure à } \Gamma_{12}$$

$$\lambda\frac{\partial T_2}{\partial n_2}=h(r,t)(T_1(r,t)-T_2(r,t)) \text{ sur } \Gamma_{21} \qquad n_2 \text{ normale extérieure à } \Gamma_{21}$$

($n_1=-n_2$ en général)

2.6 Source volumique

C'est le terme $s(r,t)$ fonction de la variable d'espace et/ou de temps.

2.7 Condition initiale

C'est l'expression du champ de température à l'instant initial $t=0$:

$$T(r,0)=T_0(r)$$

où $T_0(r)$ est une fonction de la variable d'espace.

3 Formulation variationnelle du problème

Nous nous bornerons ici à présenter le problème avec uniquement les conditions aux limites de température imposée [§2.1], de flux normal imposé [§2.3] ou d'échange [§2.4]. Les conditions aux limites d'échange paroi [§2.5] sont traitées au [§4] et celles avec relations linéaires [§2.2] se ramènent sans difficultés à celle du [§2.1].

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$.

La formulation faible de l'équation de la chaleur est :

$$\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}.v\,d\Omega+\int_\Omega \lambda\nabla T.\nabla v\,d\Omega-\int_\Gamma \lambda\frac{\partial T}{\partial n}.v\,d\Gamma=\int_\Omega s.v\,d\Omega$$

où v est une fonction suffisamment régulière s'annulant uniformément sur Γ_1. Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T=T_1(r,t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \lambda\dfrac{\partial T}{\partial n}=q(r,t) & \text{sur } \Gamma_2 \\ \lambda\dfrac{\partial T}{\partial n}=h(r,t)(T_{ext}(r,t)-T) & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

La formulation variationnelle du problème est :

$$\int_\Omega \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}.v\,d\Omega+\int_\Omega \lambda\nabla T.\nabla v\,d\Omega+\int_{\Gamma_3} hT.v\,d\Gamma=\int_\Omega s.v\,d\Omega+\int_{\Gamma_2} q.v\,d\Gamma+\int_{\Gamma_3} hT_{ext}.v\,d\Gamma$$

4 Formulation variationnelle du problème avec condition d'échange entre deux parois

On considère le problème "simplifié" où n'apparaît plus de terme source et où les conditions aux limites sont uniquement du type température imposée et échange paroi.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, de frontière $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_{12}\cup\Gamma_{21}$.

Les conditions aux limites sont dans ce cas :

$$\begin{cases} T=T_1(r,t) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \lambda\dfrac{\partial T_1}{\partial n_1}=h(r,t)(T_2(r,t)-T_1(r,t)) & \text{sur } \Gamma_{12} \\ \lambda\dfrac{\partial T_2}{\partial n_2}=h(r,t)(T_1(r,t)-T_2(r,t)) & \text{sur } \Gamma_{21} \end{cases}$$

En substituant dans la formulation faible de l'équation de la chaleur, on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} . v \, d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \nabla T . \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma_{12}} h(T_{/\Gamma_{12}} - T_{/\Gamma_{21}}) . v \, d\Gamma_{12} + \int_{\Gamma_{21}} h(T_{/\Gamma_{21}} - T_{/\Gamma_{12}}) . v \, d\Gamma_{21} = 0$$

où v s'annule uniformément sur Γ_1 .

Ce type de conditions aux limites fait apparaître des termes nouveaux mettant en relation des degrés de liberté situés sur les deux frontières en relation.

5 Discrétisation en temps de l'équation différentielle

Une façon classique de discrétiser une équation différentielle du premier ordre consiste à utiliser une θ -méthode. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y(t) = \varphi(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La $\theta -$ méthode consiste à discrétiser l'équation par un schéma aux différences finies

$$\frac{1}{\Delta t}(y_{n+1} - y_n) = \theta \varphi(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1-\theta) \varphi(t_n, y_n)$$

où y_{n+1} est une approximation de $y(t_{n+1})$, y_n étant supposée connue
et θ est le paramètre de la méthode, $\theta \in [0,1]$.

Remarque :

si $\theta = 0$ *le schéma est dit explicite,*
si $\theta \geq 0$ *le schéma est dit implicite.*

5.1.1 Précision de la méthode

Supposons y suffisamment régulière (au moins 3 fois différentiable), par un développement de Taylor au point t_n on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \Delta t \, y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} y''(t_n) + O(\Delta t^2)$$

et

$$\begin{aligned} \theta \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1-\theta) \varphi(t_n, y(t_n)) &= \theta y'(t_{n+1}) + (1-\theta) y'(t_n) \\ &= y'(t_{n+1}) + \theta (y'(t_{n+1}) - y'(t_n)) \\ &= y'(t_n) + \theta \Delta t \, y''(t_n) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

La solution vérifie donc approximativement :

$$\frac{1}{\Delta t}\left(y(t_{n+1})-y(t_n)\right)=\theta\varphi(t_{n+1},y(t_{n+1}))+(1-\theta)\varphi(t_n,y(t_n))+(\frac{1}{2}-\theta)\Delta t\,y''(t_n)+O(\Delta t^2)$$

Le schéma est d'ordre 1 en temps si $\theta\neq\frac{1}{2}$, et d'ordre 2 si $\theta=\frac{1}{2}$ (schéma de Crank-Nicolson).

5.1.2 Stabilité de la méthode

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'=-\lambda y \quad t\geq 0 \quad \lambda\in R \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

En utilisant la θ -méthode dans cette équation différentielle on obtient :

$$y_{n+1}=\frac{1-(1-\theta)\lambda\Delta t}{1+\theta\lambda\Delta t}y_n \quad 0\leq n\leq N-1$$

Soit encore :

$$y_{n+1}=r^n(\lambda\Delta t)y_0 \quad \text{avec} \quad r(x)=\frac{1-(1-\theta)x}{1+\theta x}$$

La solution approchée y_n doit être bornée (la solution exacte du problème initial l'étant), ce qui impose la condition suivante :

$$\left|r(\lambda\Delta t)\right|\leq 1$$

En étudiant les variations de la fonction $r(x)$, on constate facilement que :

- si $\theta\geq 1/2$ la condition est vérifiée quel que soit Δt , le schéma est inconditionnellement stable;
- si $\theta< 1/2$ la condition n'est vérifiée que si $\Delta t\leq\frac{2}{\lambda(1-2\theta)}$, le schéma est conditionnellement stable.

Dans la commande `THER_LINEAIRE` [U4.33.01], le paramètre θ est une donnée pouvant être fournie par l'utilisateur, la valeur par défaut est fixée à 0.57. Cette valeur a la réputation d'être préférable à la valeur de Crank-Nicolson (0,5) et "optimale" pour les interpolations quadratiques, mais nous n'avons pas retrouvé trace des justifications.

5.1.3 Application à l'équation de la chaleur

Utilisons la θ -méthode dans la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur, où l'on a posé :

$$\begin{array}{llll} T^{+}=T(r,t+\Delta t) & T^{-}=T(r,t) & h^{+}=h(r,t+\Delta t) & h^{-}=h(r,t) \\ f^{+}=f(r,t+\Delta t) & f^{-}=f(r,t) & T^{+}_{ext}=T_{ext}(r,t+\Delta t) & T^{-}_{ext}=T_{ext}(r,t) \\ s^{+}=s(r,t+\Delta t) & s^{-}=s(r,t) & T^{+}_{1}=T_{1}(r,t+\Delta t) & T^{-}_{1}=T_{1}(r,t) \end{array}$$

Introduisons les espaces de fonctions suivants :

$$\begin{aligned} V_{t^{+}} &= \left\{ v\in H^{1}(\Omega) \quad v_{/\Gamma_1}=T_{1}(r,t^{+}) \right\} \\ V_{t^{-}} &= \left\{ v\in H^{1}(\Omega) \quad v_{/\Gamma_1}=T_{1}(r,t^{-}) \right\} \\ V_{0} &= \left\{ v\in H^{1}(\Omega) \quad v_{/\Gamma_1}=0 \right\} \end{aligned}$$

Le champ $T^{-}\in V_{t^{-}}$ étant supposé connu, on cherche $T^{+}\in V_{t^{+}}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho C_p \frac{T^{+}-T^{-}}{\Delta t} v\, d\Omega + \int_{\Omega} (\theta \lambda \nabla T^{+}.\nabla v + (1-\theta)\lambda \nabla T^{-}.\nabla v)\, d\Omega \\ &-\int_{\Gamma_2} (\theta f^{+}+(1-\theta) f^{-}) v\, d\Gamma_2 - \int_{\Gamma_3} (\theta h^{+} T^{+}_{ext}+(1-\theta) h^{-} T^{-}_{ext} - \theta h^{+} T^{+} - (1-\theta) h^{-} T^{-}) v\, d\Gamma_3 \\ &= \int_{\Omega} (\theta s^{+}+(1-\theta) s^{-}) v\, d\Omega \\ &\forall v\in V_0 \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned} (hT_{ext})^{\theta} &= \theta h^{+} T^{+}_{ext}+(1-\theta) h^{-} T^{-}_{ext} \\ f^{\theta} &= \theta f^{+}+(1-\theta) f^{-} \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\Delta t} T^{+} v\, d\Omega + \int_{\Omega} \theta \lambda \nabla T^{+}.\nabla v\, d\Omega + \int_{\Gamma_3} \theta h^{+} T^{+} v\, d\Gamma_3 \\ &= \int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\Delta t} T^{-} v\, d\Omega - \int_{\Omega} (1-\theta)\lambda \nabla T^{-}.\nabla v\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} f^{\theta} v\, d\Gamma_2 \\ &+ \int_{\Gamma_3} ((hT_{ext})^{\theta} - (1-\theta) h^{-} T^{-}) v\, d\Gamma_3 + \int_{\Omega} (\theta s^{+}+(1-\theta) s^{-}) v\, d\Omega \\ &\forall v\in V_0 \end{aligned}$$

6 Discrétisation spatiale

Soit P_h un découpage de l'espace Ω , désignons par N le nombre de nœuds du maillage, p_i la fonction de forme associé au nœud i . On désigne par J l'ensemble des nœuds appartenant à la frontière Γ_1 .

Soient :

$$V_{t^+}^h=\{ v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x) \quad ; \quad v_j=T_1(x_j,t^+) \quad j\in J \}$$
$$V_{t^-}^h=\{ v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x) \quad ; \quad v_j=T_1(x_j,t^-) \quad j\in J \}$$
$$V_0^h=\{ v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x) \quad ; \quad v_j=0 \quad j\in J \}$$

Posons :

$$K_{ij}T_i=\int_{\Omega_h}\frac{\rho C_p}{\Delta t}T_i p_i p_j d\,\Omega_h+\int_{\Omega_h}\theta\lambda T_i\nabla p_i.\nabla p_j d\,\Omega_h+\int_{\Gamma_{h3}}\theta h^+ T_i p_i d\,\Gamma_{h3}$$

$$\begin{aligned}L_j= & \int_{\Omega_h}\frac{\rho C_p}{\Delta t}T^- p_j d\,\Omega_h-\int_{\Omega_h}(1-\theta)\lambda\nabla T^-.\nabla p_j d\,\Omega_h+\int_{\Gamma_{h2}} f^\theta p_j d\,\Gamma_{h2}\\ & +\int_{\Gamma_{h3}}((hT_{ext})^\theta-(1-\theta)h^- T^-)p_j d\,\Gamma_{h3}+\int_{\Omega_h}(\theta s^+ +(1-\theta)s^-)p_j d\,\Omega_h\end{aligned}$$

En dualisant les conditions aux limites en température imposée ([R3.03.01]), on fait apparaître l'opérateur B défini par :

$$(Bv)_j=\begin{cases}0 & \text{si} \quad j\notin J\\ v_j & \text{si} \quad j\notin J\end{cases}$$

On obtient finalement le système suivant :

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}K_{ij}T_i \quad + \quad ({}^tB\lambda)_j & = \quad L_j \qquad \forall j\\ \qquad\qquad (BT)_j & = \quad T_1(x_j,t) \qquad j\in J\end{cases}$$

7 Implémentation dans *Code_Aster*

7.1 Equations introduites

La commande THER_LINEAIRE [U4.33.01] permet de traiter l'équation dans le cas transitoire telle qu'elle est décrite ci-dessus, mais elle permet aussi de résoudre le problème stationnaire qui se réduit à l'équation suivante :

$$-\mathrm{div}(\lambda \nabla T)=s \text{ dans } \Omega$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T=T_1(r,t_s) & \text{sur}\,\Gamma_1 \\ \lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}=q(r,t_s) & \text{sur}\,\Gamma_2 \\ \lambda \dfrac{\partial T}{\partial n}=h(r,t)(T_{ext}(r,t_s)-T) & \text{sur}\,\Gamma_3 \end{cases}$$

t_s étant l'instant pris pour évaluer les conditions aux limites de l'équation.

Dans le cas transitoire, il est nécessaire de fournir un état initial, cet état initial (champ de température) peut être choisi parmi les suivants :

- un champ qui peut être uniforme ou quelconque créé par la commande CREA_CHAMP,
- un champ résultat d'un problème stationnaire décrit par les équations ci-dessus, l'instant de calcul est pris au premier instant défini dans la liste de réels décrivant la discrétisation temporelle définie par l'utilisateur,
- un champ extrait du résultat d'un problème transitoire.

La discrétisation en temps (valeur de Δt) doit être fournie sous la forme d'une ou plusieurs listes d'instants. Ces listes sont créées par l'utilisateur par la commande DEFI_LIST_REEL [U4.21.04].

Un transitoire thermique peut être calculé en effectuant plusieurs appels à la commande THER_LINEAIRE [U4.33.01] en enrichissant le même concept de type evol_ther en fournissant à partir du deuxième appel l'instant initial de reprise du calcul (pour obtenir T^-) et éventuellement l'instant final.

Les champs de températures issus d'un calcul contiennent à la fois la valeur aux nœuds du maillage et aux nœuds de Lagrange. Lors d'une reprise du calcul, il est possible de faire varier le type des conditions aux limites, le champ utilisé pour initier le nouveau calcul en interne est alors réduit aux seuls nœuds du maillage. Le concept résultat de type evol_ther contiendra alors des champs aux nœuds s'appuyant sur des numérotations différentes. Les opérateurs de *Code_Aster* interpolent ensuite uniquement aux nœuds du maillage lorsque la numérotation diffère.

7.2 Principales options thermiques calculées dans *Code_Aster*

7.2.1 Conditions aux limites et chargements

TEMP_IMPO	DDLI_R DDLI_F	$\int_{\Gamma_1} T^+ \Phi^* \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} \Phi^\theta \, v dG_1$
	DDLI_R DDLI_F	$\int_{\Gamma_1} \Phi^* T_1 \, d\Gamma_1$
FLUX_REP	CHAR_THER_FLUN_R CHAR_THER_FLUN_F	$\int_{\Gamma_2} q^\theta \, v dG_2$
ECHANGE	CHAR_THER_COEF_R CHAR_THER_COEF_F	$\int_{\Gamma_3} \theta h^+ T^+ v \, d\Gamma_3$
	CHAR_THER_TEXT_R CHAR_THER_TEXT_F	$\int_{\Gamma_3} ((hT_{ext})^\theta - (1-\theta) h^- T^-) v \, d\Gamma_3$
ECHANGE_PAROI	RIGI_THER_PARO_R RIGI_THER_PARO_F	$\int_{\Gamma_{12}} \theta h^+ (T^+_{/\Gamma_{12}} - T^+_{/\Gamma_{21}}) v_1 \, d\Gamma_{12}$
	CHAR_THER_PARO_R CHAR_THER_PARO_F	$\int_{\Gamma_{12}} (1-\theta) h^- (T^-_{/\Gamma_{21}} - T^-_{/\Gamma_{12}}) v_1 \, d\Gamma_{12}$
SOURCE	CHAR_THER_SOUR_R CHAR_THER_SOUR_F	$\int_{\Omega} (\theta s^+ + (1-\theta) s^-) v d\Omega$

7.2.2 Calcul des matrices élémentaires et terme transitoire

RIGI_THER	$\int_{\Omega} \theta \lambda \nabla T^+ . \nabla v d\Omega$
MASS_THER	$\int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\Delta t} T^+ v d\Omega$
CHAR_THER_EVOL	$\int_{\Omega} \frac{\rho C_p}{\Delta t} T^- v d\Omega - \int_{\Omega} (1-\theta) \lambda \nabla T^- . \nabla v d\Omega$

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	*J.P. LEFEBVRE (EDF/IMA/MMN)*	Texte initial