Relations de comportement non linéaires 1D

Résumé :
Ce document décrit les quantités calculées par l'opérateur STAT_NON_LINE nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non linéaire quasi statique décrit en [R5.03.01] dans le cas des comportements élastoplastiques ou viscoplastiques monodimensionnels. Ces comportements sont applicables aux éléments de BARRE, aux éléments de poutre et poutres multifibres (direction axiales seulement) et aux éléments d'armature de béton (modélisation GRILLE).

Les comportements décrits dans ce document sont :

- le comportement de Von Mises à écrouissage isotrope linéaire : VMIS_ISOT_LINE, et quelconque VMIS_ISOT_TRAC,
- le comportement de Von Mises à écrouissage cinématique linéaire : VMIS_CINE_LINE,
- le comportement de Von Mises à écrouissage linéaire, non symétrique en traction et compression : avec restauration du centre du domaine élastique : VMIS_ASYM_LINE. Ce dernier a été développé pour modéliser l'action du sol sur les Câbles à Isolation Gazeuse,
- le comportement de PINTO-MENEGOTTO qui permet de représenter le comportement élasto-plastique uniaxial des armatures du béton armé. Ce modèle traduit la non linéarité de l'écrouissage des barres sous chargement cyclique et prend en compte l'effet Bauschinger. Il permet de plus de simuler le flambement des armatures en compression. Cette relation est disponible dans le *Code_Aster* pour les éléments de barre et les éléments de grille,
- les comportements viscoplastiques avec effet de l'irradiation : LMARC_IRRA, VISC_IRRA_LOG, GRAN_IRRA_LOG et LEMAITRE_IRRA.
- le comportement de MAZARS dans sa version $1\mathrm{D}$. La version $1\mathrm{D}$ du modèle de MAZARS permet de rendre compte de la restauration de rigidité en cas de refermeture des fissures.

La résolution est faite dans tous les cas par une méthode d'intégration implicite à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation, et le comportement tangent qui permet de construire les matrices tangentes.
On décrit enfin une méthode, similaire à la méthode due à R.de Borst [R5.03.03] permettant d'utiliser tous les comportements disponibles en 3D dans les éléments 1D.

Table des Matières

1 Utilisation des relations de comportement 1D

1.1 Relations de comportement 1D dans le *Code_Aster*

Les relations traitées dans ce document sont :

VMIS_ISOT_LINE	Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire symétrique
VMIS_ISOT_TRAC	Von Mises avec écrouissage isotrope quelconque
VMIS_CINE_LINE	Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique.
ECRO_CINE_1D	Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique.
GRILLE_ISOT_LINE	Von Mises avec écrouissage isotrope linéaire symétrique
GRILLE_CINE_LINE	Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire symétrique
PINTO_MENEGOTTO	Comportement des armatures de béton armé
GRILLE_PINTO_MEN	Comportement des armatures de béton armé
VMIS_ASYM_LINE	Von Mises avec écrouissage linéaire asymétrique et restauration
LEMAITRE, LEMAITRE_IRRA	Comportement viscoplastique des assemblages combustibles : Modèle de LEMAITRE
LMARC_IRRA	Comportement viscoplastique des assemblages combustibles sous irradiation : Modèle du LMA-RC
VISC_IRRA_LOG, GRAN_IRRA_LOG	Comportement viscoplastique des assemblages combustibles : Modèles issus des essais REFLET et FLETAN
MAZARS	Comportement de MAZARS dans sa version $1\mathrm{D}$.

Ces relations de comportement (incrémentales) sont données dans l'opérateur STAT_NON_LINE [U4.51.03] sous le mot clé facteur COMP_INCR, par le mot clé RELATION [U4.51.03]. Elles ne sont valables qu'en petites déformations. n décrit pour chaque relation de comportement le calcul du champ de contraintes à partir d'un incrément de déformation donné (cf. algorithme de Newton [R5.03.01]), le calcul des forces **nodales** R et de la matrice tangente K_i^n .

1.2 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $-$.

Les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par Δ . On a ainsi :

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t+\Delta t)=\mathbf{Q}^{-}(t)+\Delta\,\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{-}+\Delta\,\mathbf{Q}$$

$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes (en 1D, on ne s'intéresse qu'à l'unique composante non nulle uniaxiale).
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	opérateur déviateur : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{ij}}=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{ij}}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_{kk}\boldsymbol{\delta}_{ij}$.
$(\ )eq$	valeur équivalente de Von Mises, égale en 1D à la valeur absolue
$\Delta\,\boldsymbol{\varepsilon}$	incrément de déformation.
$\mathbf{A}$	tenseur d'élasticité, égal en 1D au module d'Young E
λ,μ,E,K	coefficients de l'élasticité isotrope.
α	coefficient de dilatation thermique sécant.
T	température.
$(\ )_+$	partie positive.
P	déformation plastique cumulée
ε^p	déformation plastique

1.3 Changement de variables

Quel que soit le type d'élément fini faisant référence à une loi de comportement 1D, il faut effectuer un changement de variables pour passer des quantités élémentaires (efforts, déplacements) aux contraintes et déformations.

1.3.1 Calcul des déformations (petites déformations)

Pour chacun des éléments finis de *Code_Aster*, dans `STAT_NON_LINE`, l'algorithme global (Newton) fournit à la routine élémentaire, qui intègre le comportement, un accroissement du champ de déplacement.
Pour les éléments de barre, on calcule la déformation (une seule composante axiale) par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{u(l)-u(0)}{l},$$

et l'accroissement de déformation par :

$$\boldsymbol{\Delta}\,\varepsilon=\frac{\Delta u(l)-\Delta u(0)}{l},$$

Pour les éléments de grille (modélisations `GRILLE` et `GRILLE_MEMBRANE`), on calcule la déformation membranaire comme pour les éléments de coques DKT. Simplement, une seule direction correspond physiquement aux directions d'armatures. On se retrouve donc en présence d'un comportement 1D.
D'autre part, en petites déformations, pour tous les modèles décrits dans ce document, on écrit pour tout instant la partition des déformations sous la forme d'une contribution élastique, de dilatation thermique, et de déformation plastique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}(t) \text{ avec}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}(t)=\mathbf{A}^{-1}\big(T(t)\big)\boldsymbol{\sigma}(t)=\frac{1}{E(T)}\boldsymbol{\sigma}(t)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}(t)=\boldsymbol{\alpha}\big(T(t)\big)\big(T(t)-T_{ref}\big)\mathbf{Id}$$

1.3.2 Calcul des efforts généralisés (contraintes intégrées)

Après intégration du comportement 1D, il faut intégrer la composante de contraintes obtenue, pour fournir à l'algorithme global (Newton) un vecteur contenant les efforts généralisés.
Pour les éléments de barre, on calcule l'effort (uniforme dans l'élément, en supposant que la section est constante) par : $N=S\,\sigma$,

et le vecteur force nodale équivalente (comme pour les éléments de poutre, [R3.08.01]) par :

$$F=\begin{bmatrix}-N\\N\end{bmatrix}$$

Pour les éléments de `GRILLE` , on calcule les efforts comme pour les éléments de coques DKT (efforts membranaires) par intégration des contraintes dans l'épaisseur (une seule couche et un seul point d'intégration).

2 Comportement de Von-Mises à écrouissage isotrope linéaire : `VMIS_ISOT_LINE` ou `VMIS_ISOT_TRAC`

2.1 Équations du modèle `VMIS_ISOT_LINE`

Elles sont la restriction du comportement 3D [R5.03.02] au cas uniaxial :

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p=\frac{3}{2}\dot{p}\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}}=\dot{p}\frac{\sigma}{|\sigma|} \\ \frac{\sigma}{E}=\varepsilon-\varepsilon^p-\varepsilon^{th} \\ \sigma_{eq}-R(p)=|\sigma|-R(p)\leq 0 \\ \left(\begin{array}{l}\dot{p}=0\, si\, \sigma_{eq}-R(p)<0 \\ \dot{p}\geq 0\, si\, \sigma_{eq}-R(p)=0\end{array}\right. \end{array}\right.$$

avec :

- $\dot{\varepsilon}^p$ vitesse de déformation plastique,
- p déformation plastique cumulée,
- $\varepsilon^{th}=\alpha\left(T-T_{ref}\right)$ déformation thermique,
- $R(p)=\frac{E E_T}{E-E_T}p+\sigma_y$ fonction d'écrouissage linéaire isotrope, ou $R(p)$ bien affine par morceaux, déduite de la courbe de traction.

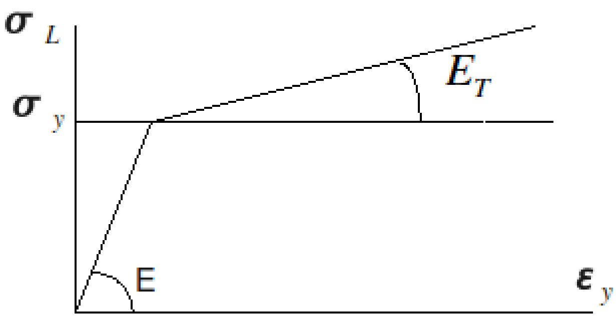
Dans le cas `VMIS_ISOT_LINE`, les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur `ECRO_LINE` ou `ECRO_LINE_FO` de l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01].

/ `ECRO_LINE = ( D_SIGM_EPSI =` E_T `, SY =` σ_y `)`
/ `ECRO_LINE_FO = ( D_SIGM_EPSI =` E_T `, SY =` σ_y `)`

Dans le cas `VMIS_ISOT_TRAC`, les données des caractéristiques des matériaux sont fournies sous le mot clé facteur `TRACTION` de l'opérateur `DEFI_MATERIAU` [U4.43.01].

```
TRACTION = _F (SIGM = courbe_traction)
```

`courbe_traction` représente la courbe de traction, point par point. Le premier point permet de définir la limite d'élasticité σ_y et le module d'Young E [R5.03.02].



`ECRO_LINE_FO` correspond au cas où E_T et σ_y dépendent de la température et sont alors calculés pour la température du point de Gauss courant. Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs `ELAS` ou `ELAS_FO`. Dans ce cas la courbe de traction est la suivante :

$$\begin{cases} \sigma_L = E\,\varepsilon_L & si\,\varepsilon_L < \dfrac{\sigma_y}{E} \\ \sigma_L = \sigma_y + E_T\left(\varepsilon_L - \dfrac{\sigma_y}{E}\right) & si\,\varepsilon_L \geq \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$

Lorsque le critère est atteint on a :

$$\sigma_L - R(p) = 0 \text{ , donc } \sigma_L - R\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}\right) = 0 \text{ d'où :}$$

$$R(p) = \frac{E_T E}{E - E_T}\, p + \sigma_y = H\, p + \sigma_y$$

Dans le cas d'une courbe de traction, la démarche est identique à [R5.03.01].

2.2 Intégration de la relation `VMIS_ISOT_LINE`

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 3D [R5.03.02] on obtient :

$$\begin{cases} \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| - R(p^- + \Delta p) \leq 0 \\ E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- = E\,\Delta p \dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right|} \\ \Delta p \ \geq \ 0 \ \ si \ \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| = R\left(p^- + \Delta p\right) \\ \Delta p \ = \ 0 \ \ si \ \left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| < R\left(p^- + \Delta p\right) \end{cases}$$

Deux cas se présentent :

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| < R\left(p^- + \Delta p\right)$

  dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\sigma = \mathrm{E}\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{\mathrm{th}}\right) + \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}^-}\sigma^-$

  donc $\left|\sigma^- \dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}^-} + \mathrm{E}\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| < R(p^-)$

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| = R(p^- + \Delta p)$

  dans ce cas $\Delta p \geq 0$

  donc $\left|\dfrac{\sigma^- E}{E^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| \geq R(p^-)$.

On en déduit l'algorithme de résolution :

posons $\sigma^e = \dfrac{\mathrm{E}\,\sigma^-}{\mathrm{E}^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$

si $\left|\sigma^e\right| \leq R(p^-)$ alors $\Delta p = 0$ et $\Delta\sigma = \mathrm{E}\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$

si $\left|\sigma^e\right| > R(p^-)$ alors il faut résoudre :

$$\sigma^e = \sigma^- + \Delta\sigma + E\,\Delta p \frac{\sigma^- + \Delta\sigma}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right|}$$

$$\sigma^e = \left(1 + \frac{E\,\Delta p}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right|}\right)\left(\sigma^- + \Delta\sigma\right)$$

donc en prenant la valeur absolue :

$$\left|\sigma^e\right| = \left(1 + \frac{E\,\Delta p}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right|}\right)\left(\sigma^- + \Delta\sigma\right)$$

soit, en utilisant $\begin{array}{l}\left|\sigma^- + \Delta\sigma\right| = \; R\left(p^- + \Delta p\right)\\ \left|\sigma^e\right| = R\left(p^- + \Delta p\right) + E\,\Delta p\end{array}$.

On en déduit donc :

- dans le cas d'un écrouissage linéaire : $\Delta p = \dfrac{\left|\sigma^e\right| - \left(\sigma_y + Hp^-\right)}{E+H}$
- et dans le cas d'un écrouissage quelconque, la courbe $R(p)$ étant affinée par morceaux, on résout directement l'équation en Δp : de la même façon $E\,\Delta p + R\left(p^- + \Delta p\right) = \left|\sigma^e\right|$ qu'en 3D [R5.03.02].

Remarquons au passage que : $\dfrac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|} = \dfrac{\sigma}{R(p)}$

alors $\sigma = \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) = \dfrac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|} R(p) = \dfrac{\sigma^e}{1 + \dfrac{E\,\Delta p}{R(p)}}$

De plus, l'option `FULL_MECA` permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_\mathbf{i}^\mathbf{n}$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

si $\left|\sigma^e\right| > R\left(p^-\right)$ $\qquad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E_T$

sinon $\qquad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$

Remarque :

L'option `RIGI_MECA_TANG` qui permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_\mathbf{i}^\mathbf{0}$ utilisée dans la phase de prédiction de l'algorithme de Newton, tient compte de l'indicateur de plasticité à l'instant précédent :

si $\chi = 1 \quad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E_T$ *si* $\chi = 0 \quad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$

2.3 Variables internes

La relation de comportement `VMIS_ISOT_LINE` produit deux variables internes : p et χ

3 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : VMIS_CINE_LINE

3.1 Équation du modèle VMIS_CINE_LINE

Pour des raisons de performances la relation est écrite en 1D. Elles sont la restriction du comportement 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) au cas uniaxial. Le comportement 3D s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{th}}\right) \text{ avec } \mathbf{K} \text{ opérateur d'élasticité}$$

$$\mathbf{X}=C\,\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}$$

$$F(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{R},\mathbf{X})=(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{\mathbf{eq}}-\sigma_y \text{ avec } \mathbf{A}_{\mathbf{eq}}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\mathbf{A}}\cdot\tilde{\mathbf{A}}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{p}}=\dot{p}\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{3}{2}\dot{\mathbf{p}}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X}}{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{X})_{\mathbf{eq}}} \quad \begin{cases}\text{si } F<0 & \dot{p}=0\\ \text{si } F=0 & \dot{p}\geq 0\end{cases}$$

Dans le cas uniaxial, les tenseurs s'écrivent :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\sigma\,\mathbf{D} \qquad \mathbf{X}=X\,\mathbf{D} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{p}}=\frac{3}{2}\varepsilon^p\,\mathbf{D} \text{ avec } \mathbf{D}=\begin{bmatrix}2/3 & & \\ & -1/3 & \\ & & -1/3\end{bmatrix}$$

Tant que le chargement est monotone, on obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p=\varepsilon^p \qquad X=\frac{3}{2}C\,\varepsilon^p \qquad \sigma=\frac{3}{2}C\,\varepsilon^p+\sigma_y \qquad \sigma=F(\varepsilon)=\sigma_y+\frac{E\cdot E_T}{E-E_T}p$$

C est déterminée par : $C=\frac{2}{3}\frac{E\,E_T}{E-E_T}$. On pose : $H=\frac{E\,E_T}{E-E_T}=\frac{3}{2}C$

La relation de comportement 1D s'écrit alors :

$$\left|\begin{array}{l}|\sigma^-+\Delta\sigma-X^--\Delta X|\\ E\,\Delta\varepsilon^p=E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)-\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)+\dfrac{E}{E^-}\sigma^-\\ X=\dfrac{3}{2}C\,\varepsilon^p=H\,\varepsilon^p\\ |\sigma-X|-\sigma_y\leq 0\\ \begin{cases}\dot{p}=0\,si\,|\sigma-X|-\sigma_y<0\\ \dot{p}\geq 0\,si\,|\sigma-X|-\sigma_y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE ou ECRO_LINE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

/ ECRO_LINE = (D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)

/ ECRO_LINE_FO = (D_SIGM_EPSI = E_T , SY = σ_y)

3.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_LINE

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) on obtient :

$$\begin{cases} \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| - \sigma_y \le 0 \\ E\,\Delta\varepsilon^p = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- \\ \Delta\varepsilon^p = \Delta p\,\dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right|} \\ \dfrac{X}{H} - \dfrac{X^-}{H^-} = \Delta\varepsilon^p \\ \Delta p \ge 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| = \sigma_y \\ \Delta p = 0 \quad si \quad \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| < \sigma_y \end{cases}$$

avec $\Delta\varepsilon^{th} = \alpha\left(T - T_{ref}\right) - \alpha^-\left(T^- - T_{ref}\right)$

Deux cas se présentent :

- $\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| < \sigma_y$ dans ce cas $\Delta p = 0$ soit $\sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^- - \dfrac{H}{H^-}X^-$ donc $\left|\sigma^-\dfrac{E}{E^-} - X^-\dfrac{H}{H^-} + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)\right| < R(p^-)$,
- sinon $\Delta p \ge 0$.

Pour simplifier les écritures on posera : $\sigma^e = \dfrac{E}{E^-}\sigma^- - \dfrac{H}{H^-}X^- + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right)$.

On en déduit l'algorithme de résolution :

1) si $\left|\sigma^e\right| \le \sigma_y$ alors $\Delta p = 0, \quad X = X^-\dfrac{H}{H^-}, \quad \sigma = E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}\right) + \dfrac{E}{E^-}\sigma^-$
2) sinon il faut résoudre :

$$\begin{cases} E\,\Delta\varepsilon^p = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{th}) - \Delta\sigma = \sigma^e - \left(\sigma^- + \Delta\sigma\right) + X^-\dfrac{H}{H^-} \\ \Delta\varepsilon^p = \Delta p\,\dfrac{\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X}{\left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right|} = \Delta p\,\dfrac{\sigma - X}{\left|\sigma - X\right|} \\ X - \dfrac{H}{H^-}X^- = H\,\Delta\varepsilon^p \\ \left|\sigma^- + \Delta\sigma - X^- - \Delta X\right| - \sigma_y = 0 \end{cases}$$

Remarquons que : $\dfrac{H}{H^-}X^- = X - H\,\Delta\varepsilon^p$.

On déduit alors de la première équation : $\sigma^e = \sigma - X + (E + H)\,\Delta\varepsilon^p$

On obtient donc, en éliminant $\sigma - X$ de la deuxième équation :

$$\Delta\varepsilon^p = \sigma^e\,\frac{\Delta p}{(E+H)\,\Delta p + \sigma_y}$$

En remplaçant $\Delta\varepsilon^p$ dans la relation entre σ^e et $\sigma-X$, on obtient :

$$\sigma-X=\sigma^e\left(\frac{\sigma_y}{(E+H)\Delta p+\sigma_y}\right)$$

En prenant la valeur absolue des deux membres de l'équation précédente, on trouve Δp :

$$(E+H)\Delta p+\sigma_y=\left|\sigma^e\right|$$

Une fois Δp déterminé , on peut calculer :

$$\Delta\varepsilon^p=\Delta p\frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$$

$$X=X^-+\Delta X=\frac{H X^-}{H^-}+H\Delta p\frac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$$

et en utilisant : $\dfrac{\sigma-X}{\sigma_y}=\dfrac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}$, on obtient directement : $\sigma=\sigma_y\dfrac{\sigma^e}{\left|\sigma^e\right|}+X$

De plus, l'option `FULL_MECA` permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_\mathbf{i}^\mathbf{n}$ à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

si $\left|\sigma^e\right|>R\left(p^-\right)$ $\qquad \dfrac{\delta\partial}{\delta\varepsilon}=E_T$

sinon $\qquad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E$

L'option `RIGI_MECA_TANG` qui permet de calculer la matrice tangente $\mathbf{K}_\mathbf{i}^\mathbf{0}$ utilisée dans la phase de prédiction de l'algorithme de Newton est obtenue à l'aide de l'indicateur de plasticité χ^- de l'instant précédent :

- si $\chi^-=1$ alors $\dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E_T$
- si $\chi^-=0$ alors $\dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E$

3.3 Variables internes

La relation de comportement `VMIS_CINE_LINE` produit deux variables internes : X .et χ

4 Comportement de Von Mises, écrouissage cinématique linéaire 1D : VMIS_CINE_GC

4.1 Équation du modèle VMIS_CINE_GC

Pour des raisons de performances la relation est également écrite en 1D pour une utilisation avec des éléments finis de type poutre multifibre. Les équations sont issues de la restriction du comportement 3D ([R5.03.02] et [R5.03.16]) au cas uniaxial.
Les équations du modèle sont les mêmes que celles du § 9.

Les données des matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

```
/ ECRO_LINE = _F(
      ♦ D_SIGM_EPSI   =  E_T                                   [Réel]
      ♦ SY            =  σ_y                                   [Réel]
     ◊ SIGM_LIM       = sigmlim                                [Réel]
     ◊  EPSI_LIM      = epsilim                                [Réel]
)
```

Les opérandes SIGM_LIM et ESPI_LIM permettent de définir les bornes qui correspondent aux états limites de service et ultime, classiquement utilisées lors d'étude en génie civil.

◊ SIGM_LIM = sigmlim
Définition de la contrainte limite.

◊ EPSI_LIM = epslim
Définition de la déformation limite.

Ces bornes sont obligatoires lorsque l'on utilise le comportement VMIS_CINE_GC (Cf. [U4.51.11] Comportements non-linéaires, [U4.42.07] DEFI_MATER_GC). Dans les autres cas elles ne sont pas prises en compte.

4.2 Intégration de la relation VMIS_CINE_GC

La méthode d'intégration est identique à celle présentées au § 10.

4.3 Variables internes

La modélisation supportée est 1D, le nombres de variables internes est de 6.

- $V1$: Cette variable représente la contrainte divisée par la contrainte limite sigmlim.
- $V2$: Cette variable représente la déformation totale divisée par la déformation limite epslim.
- $V3$: Écrouissage cinématique : XCINXX. En 1D seul un scalaire est nécessaire.
- $V4$: Indicateur plastique : INDIPLAS. Indique si le matériau a dépassé le critère élastique.
- $V5$: dissipation non récupérable : DISSIP. Lors de calculs sismiques il peut être utile à l'utilisateur de connaître l'énergie dissipée non récupérable. La variable DISSIP représente le cumul d'énergie non récupérable. L'incrément d'énergie non récupérable s'écrit sous la forme :
$$\Delta Eg=\frac{1}{2}\left(E^{+}\Delta\varepsilon-\left(\sigma^{+}-\sigma^{-}\right)\right)\Delta\varepsilon$$
- $V6$: dissipation thermodynamique : DISSTHER. L'incrément de dissipation thermodynamique s'écrit sous la forme : $\Delta Eg=\sigma_y\dot{p}$.

5 Comportement de Von Mises à écrouissage linéaire asymétrique : VMIS_ASYM_LINE

5.1 Équations du modèle VMIS_ASYM_LINE

5.1.1 Comportement asymétrique en traction et en compression

C'est un comportement découplé en traction et compression, construit à partir de VMIS_ASYM_LINE, mais avec des limites d'élasticité et des modules d'écrouissage différents en traction et en compression. Nous adoptons un indice T pour la traction et C pour la compression. Le comportement élastique en traction et compression est identique et caractérisé par le même module d'Young. Il y a deux domaines d'écrouissage isotrope définis par R_T et R_C. Les deux domaines sont indépendants l'un de l'autre.

YT	limite d'élasticité en traction. En valeur absolue.
YC	limite d'élasticité en compression. En valeur absolue.
p_T	Variable interne en traction. Valeur algébrique.
p_C	Variable interne en compression. Valeur algébrique.
E_{TT}	Pente d'écrouissage en traction.
E_{TC}	Pente d 'écrouissage en compression.

Les équations du modèle de comportement sont :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p=\dot{\varepsilon}-\mathrm{E}^{-1}\sigma-\dot{\varepsilon}^{th} \\ \dot{\varepsilon}^p=\dot{\varepsilon}_C^p+\dot{\varepsilon}_T^p \\ \dot{\varepsilon}_C^p=\dot{\varepsilon}_C\dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \dot{\varepsilon}_C^p=\dot{\varepsilon}_T\dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \sigma-R_T(p_T)\leq 0 \\ -\sigma-R_C(p_C)\leq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \dot{p}_C=0 \quad si \quad -\sigma-R_C(p_C)<0 \\ \dot{p}_C\geq 0 \quad si \quad -\sigma=R_C(p_C) \\ \dot{p}_T=0 \quad si \quad \sigma-R_T(p_T)<0 \\ \dot{p}_T\geq 0 \quad si \quad \sigma=T_T(p_T) \end{cases}$$

$\dot{\varepsilon}_C^p$: vitesse de déformation plastique en compression,

$\dot{\varepsilon}_T^p$: vitesse de déformation plastique en traction,

$\dot{\varepsilon}^{th}$: déformation d'origine thermique : $\varepsilon^{th}=\alpha(T-T_{ref})$

On remarque que l'on ne peut avoir simultanément plastification en traction et en compression : soit $\dot{p}_C=0$, soit $\dot{p}_C=0$, soit les deux sont nulles.

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous le mot clé facteur ECRO_ASYM_LINE de l'opérateur DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

```
ECRO_ASYM_LINE = _F (
     DT_SIGM_EPSI = E_TT ,  SY_T = σ_yT ,
    DC_SIGM_EPSI = E_TC ,   SY_C = σ_yC ,)
```

Le module d'Young E est fourni sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

On calcule les fonctions d'écrouissage par :
$$R_T(p)=\frac{E_{TT}E}{E-E_{TT}}p_T+\sigma_{yT}=H_T\cdot p_T+\sigma_{yT}$$
$$R_C(p)=\frac{E_{TC}E}{E-E_{TC}}p_C+\sigma_{yC}=H_C\cdot p_C+\sigma_{yC}$$

5.2 Intégration du comportement VMIS_ASYM_LINE

Par discrétisation implicite directe de la relation de comportement asymétrique, de façon analogue à la précédente, on obtient :

$$\begin{cases}
\Delta\varepsilon^p=\Delta\varepsilon_T^p+\Delta\varepsilon_C^p\\
\Delta\varepsilon^p=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}-\dfrac{\Delta\sigma}{E}\\
\Delta\varepsilon_T^p=\Delta p_T\dfrac{\sigma^-+\Delta\sigma}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}\\
\Delta p_T\geq 0 \quad si \quad (\sigma^-+\Delta\sigma)-R_T\left(\bar{p}_T+\Delta\bar{p}_T\right) \leq 0\\
\Delta p_T=0 \quad si \quad \left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_T\left(\bar{p}_T+\Delta\bar{p}_T\right) < 0\\
\\
\Delta\varepsilon_C^p=\Delta p_C\dfrac{\sigma^-+\Delta\sigma}{\left|\sigma^-+\Delta\sigma\right|}\\
-\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right)\leq 0\\
\Delta p_C\geq 0 \quad si \quad -\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right) = 0\\
\Delta p_C=0 \quad si \quad -\left(\sigma^-+\Delta\sigma\right)-R_C\left(\bar{p}_C+\Delta\bar{p}_C\right) < 0
\end{cases}$$

L'intégration est similaire à celle de VMIS_ISOT_LINE pour chacune des directions de traction et de compression. Il faut bien voir que les centres des domaines d'élasticité sont des données (calculées explicitement au pas précédent) pour le problème incrémental à résoudre.

Quatre cas se présentent :

- $\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}>0$ on pose $\sigma_T^e=\sigma^-+E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)$
  - si $\sigma_T^e<R_T\left(\bar{p}_T\right)$ dans ce cas $\Delta p_T = 0$ donc $\sigma=\sigma_T^e$ et $\dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$
  - sinon : $\Delta p_T=\dfrac{\left|\sigma_T^e\right|-\left(\sigma_{yT}+H_T p_T^-\right)}{E+H_T}$, $\Delta p_C=0$ $\quad \sigma=\dfrac{\sigma_T^e}{1+\dfrac{E\Delta p_T}{R_T\left(p_T\right)}}=\dfrac{\sigma_T^e}{\left|\sigma_T^e\right|}R_T\left(p_T\right)$ $\quad \dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}=E_{TT}$

- $\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}<0$ on pose $\sigma_C^e=\sigma^-+E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{th}\right)$
  - si $-\sigma_C^e<R_C\left(\bar{p}_C\right)$ dans ce cas $\Delta p_C = 0$ donc $\sigma=\sigma_C^e$ et $\dfrac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = E$

- sinon : $\Delta p_C = \dfrac{\left|\sigma_C^e\right| - \left(\sigma_{yC} + H_C\, p_C^{\,-}\right)}{E + H_C}$, $\Delta p_T = 0$ $\quad \sigma = \dfrac{\sigma_C^e}{1 + \dfrac{E\,\Delta p_C}{R_C(p_C)}} = \dfrac{\sigma_C^e}{\left|\sigma_C^e\right|} R_C(p_C)$

$$\frac{\delta \sigma}{\delta \varepsilon} = E_{TC}$$

Remarque :

La matrice tangente initiale (option `RIGI_MECA_TANG`) est prise égale à la matrice élastique.

5.3 Variables internes

La relation de comportement `VMIS_ASYM_LINE` produit 2 variables internes : $p_C \quad p_T$.
Elle n’est pas utilisable pour les éléments de grille.

6 Modèle de PINTO_MENEGOTTO

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit le comportement 1D des aciers d'armatures du béton armé [bib 1]. La loi constitutive de ces aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique dont la formulation analytique a été proposée par A. Giuffré et P. Pinto en 1973 [bib 2] et a été ensuite développée par M. Menegotto [bib 3].

Au cours des cycles, le trajet de chargement entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type $\sigma=f(\varepsilon)$. L'intérêt de cette formulation est que la même équation pilote les courbes de charge et de décharge (voir par exemple les figures [Figure 6.1.1-a] et [Figure 6.1.2-a]). Les paramètres attachés à la fonction f sont réactualisés après chaque inversion de chargement. La réactualisation de ces paramètres dépend du trajet effectué dans la zone plastique au cours du demi-cycle précédent.

Par ailleurs, ce modèle peut traiter le flambage inélastique des barres (G. Monti et C. Nuti [bib 4]). L'introduction de nouveaux paramètres dans l'équation des courbes permet alors de simuler l'adoucissement de la réponse contrainte-déformation en compression.

6.1 Formulation du modèle

6.1.1 Chargement monotone

Ce chapitre décrit le premier chargement que subit la barre, c'est à dire la partie précédant l'activation de la courbe de Giuffré [Figure 6.1.1-a].
La courbe de traction monotone de l'acier est typiquement décrite par les trois zones successives suivantes :

- L'élasticité linéaire, définie par le module d'Young E et la limite d'élasticité σ_y. $\sigma=E\varepsilon$ (zone 1, [Figure 6.1.1-a])
- Le palier plastique, compris entre la déformation élastique limite ε_y^0 et la déformation d'écrouissage ε_h, limite supérieure du plateau en déformation. Au cours du palier la contrainte reste constante. $\sigma=\sigma_y^0$ (zone 2, [Figure 6.1.1-a])
- L'écrouissage, décrivant la courbe de traction jusqu'au point ultime de contrainte et de déformation, (ε_u,σ_u). Cette partie est représentée par un polynôme du quatrième degré : $\sigma=\sigma_u-(\sigma_u-\sigma_y^0)\left(\frac{\varepsilon_u-\varepsilon}{\varepsilon_u-\varepsilon_h}\right)^4$ (zone 2, [Figure 6.1.1-a])

La pente d'écrouissage (utilisée par la suite, pour le comportement cyclique) est ici définie par : $E_h=\frac{\sigma_u-\sigma_y^0}{\varepsilon_u-\varepsilon_y^0}$. C'est la pente moyenne des zones 2 et 3 de la figure suivante.

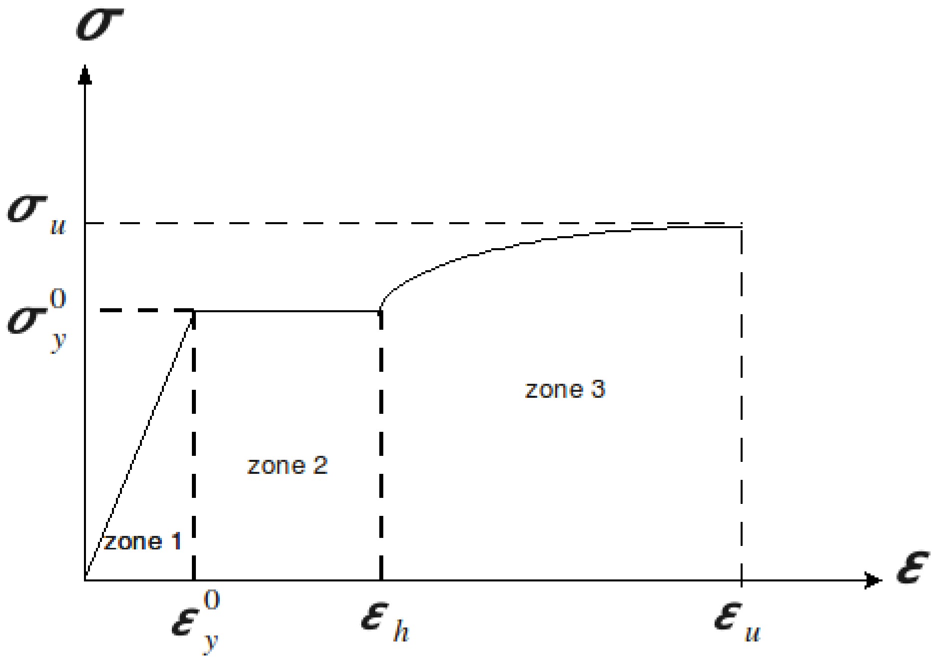


Figure 6.1.1-a : Courbe de comportement.

6.1.2 Chargement cyclique

On se place maintenant dans le cas où la barre subit une décharge consécutive au premier chargement. Deux cas se présentent alors :

- la position de départ se situe dans la zone élastique. La décharge reste dans ce cas élastique,
- la position de départ se situe dans la zone plastique ($\varepsilon \geq \varepsilon_y^0$). La réponse est tout d'abord élastique, puis, pour une certaine valeur de la déformation, la décharge devient non linéaire [Figure 6.1.2-a] (ceci est vrai pour une décharge à partir de la zone 2 ou de la zone 3).

La relation que doit satisfaire la déformation pour que la courbe de Giuffré soit activée est la suivante :

$$\left| \varepsilon_{max} - \varepsilon \right| > \frac{\left|\varepsilon_y^0\right|}{3.0}$$, avec ε_{max} la déformation maximale atteinte en charge.

Dès que l'on a franchi cette limite à la première décharge, c'est le comportement cyclique (courbe de Giuffré [Figure 6.1.2-a]) qui est activé.

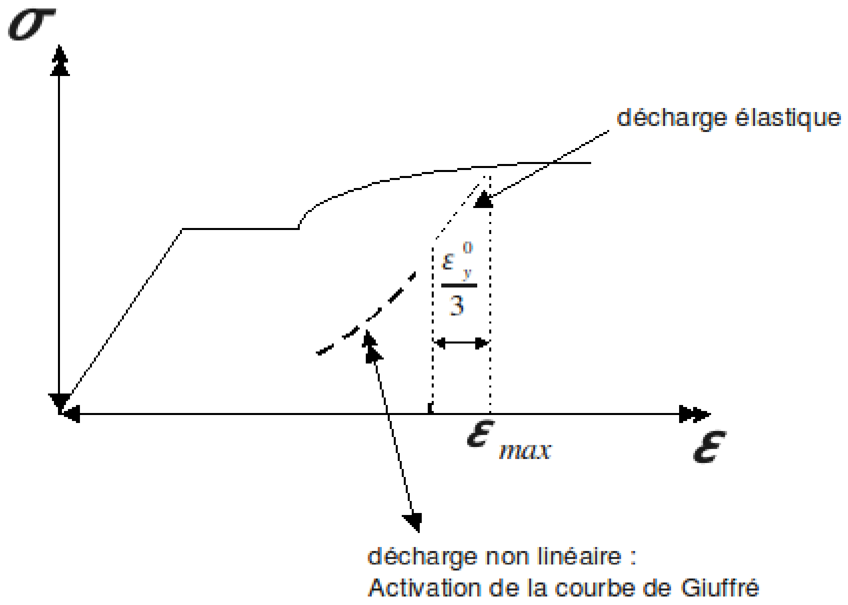


Figure 6.1.2-a : Courbe de comportement avec décharge.

6.1.2.1 Présentation du n-ième demi-cycle

L'allure de la courbe du n-ième demi-cycle dépend de l'excursion plastique effectuée au cours du demi-cycle précédent. On définit les quantités suivantes [Figure 6.1.2.1-a] :

- σ_y^n : Limite d'élasticité du n-ième demi-cycle. (Calcul explicité au [§5.1.2.2])
- σ_r^{n-1} : Contrainte au dernier point d'inversion (contrainte maximale atteinte au n-1ième demi-cycle).
- ε_r^{n-1} : Déformation au dernier point d'inversion (déformation maximale atteinte au n-1ième demi-cycle).
- ε_y^n : Déformation correspondant à σ_y^n : $\varepsilon_y^n=\varepsilon_r^{n-1}+\frac{\sigma_y^n-\sigma_r^{n-1}}{E}$
- $f(t)$: Excursion plastique du n-ième cycle

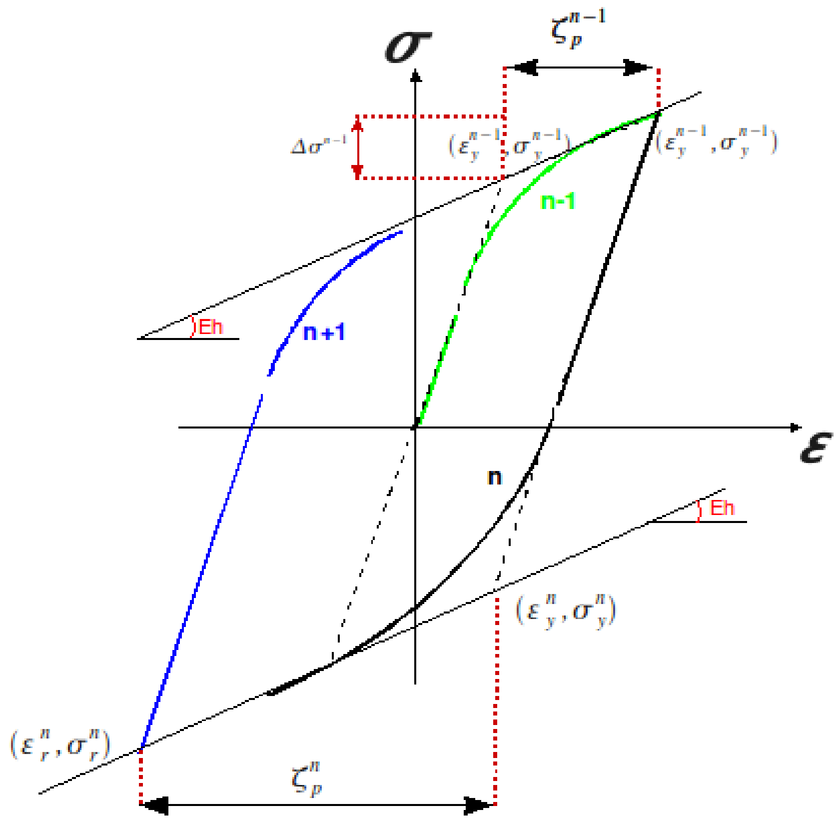


Figure 6.1.2.1-a : Comportement cyclique.

6.1.2.2 Loi d'écrouissage

Le modèle est basé sur une loi d'écrouissage cinématique. Les branches des demi-cycles sont comprises entre deux asymptotes de pente E_h (pente d'écrouissage asymptotique).

On détermine donc σ_y^n de la façon suivante : $\sigma_y^n = \sigma_y^{n-1}.\, sign\left(-\zeta_p^{n-1}\right) + \Delta\sigma^{n-1}$ où la fonction $sign(x) = -1$ si $x<0$ et 1 si $x>0$ et où $\Delta\sigma^{n-1}$ est l'incrément de contrainte plastique du demi-cycle précédent [Figure 6.1.2.1-a] qui est défini par : $\Delta\sigma^{n-1} = E_h \zeta_p^{n-1}$.

Pour chaque demi-cycle on détermine donc σ_y^n en fonction de σ_y^{n-1} et ζ_p^{n-1} , on en déduit , ε_y^n puis on calcule le demi-cycle suivant (par la loi de comportement ci-dessous). La déformation maximale (en valeur absolue) atteinte avant de changer de sens permettra de calculer l'excursion plastique $\zeta_p^n = \varepsilon_r^n - \varepsilon_y^n$.

6.1.2.3 Description analytique des courbes $\sigma = f(\varepsilon)$

L'expression choisie dans le modèle pour décrire les courbes de chargement est la suivante :

$$\sigma^* = b\,\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{\left(1+\left(\varepsilon^*\right)^R\right)^{1/R}}\right)\varepsilon^*$$

Avec $b = \dfrac{E_h}{E}$ rapport de la pente d'écrouissage sur la pente d'élasticité.

$$\varepsilon^{*}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_r^{n-1}}{\varepsilon_y^n-\varepsilon_r^{n-1}}$$

$$\sigma^{*}=\frac{\sigma-\sigma_r^{n-1}}{\sigma_y^n-\sigma_r^{n-1}}$$

$$\xi_p^{n-1}=\frac{\zeta_p^{n-1}}{\varepsilon_y^n-\varepsilon_r^{n-1}}$$

La grandeur R permet de décrire l'allure de la courbure des branches. Elle est fonction du trajet plastique effectué au cours du demi-cycle précédent :

$$R(\xi)=R_0-g(\xi) \text{ où } g(\xi)=\frac{A_1.\xi}{A_2+\xi}$$

Les paramètres R_0, A_1 et A_2 sont des constantes sans unité dépendant des propriétés mécaniques de l'acier. Leurs valeurs sont obtenues expérimentalement et Menegotto [bib 3] propose :

$$R_0=20.0 \qquad A_1=18.5 \qquad A_2=.015$$

6.1.3 Cas du flambage inélastique

Monti et Nuti [bib 4] montrent que pour un rapport entre la longueur L et le diamètre D de la barre inférieur à 5, la courbe de compression est identique à celle de traction. Par contre, lorsque $L/D>5$ on observe un flambement de la barre. Dans ce cas la courbe de compression dans la zone plastique a un comportement adoucissant. Le modèle disponible dans *Code_Aster* permet de décrire également ce phénomène.

On définit les variables suivantes [Figure 6.1.3-a] :

- E_0 : Module d'Young élastique initial (correspondant à E sans flambage).
- b_c : Rapport de la pente d'écrouissage sur la pente élastique en compression.
- b_t : Rapport de la pente d'écrouissage sur la pente élastique en traction (recharge après compression avec flambage).
- E_r : Module d'Young réduit en traction (pente de la courbe de recharge après compression avec flambage).

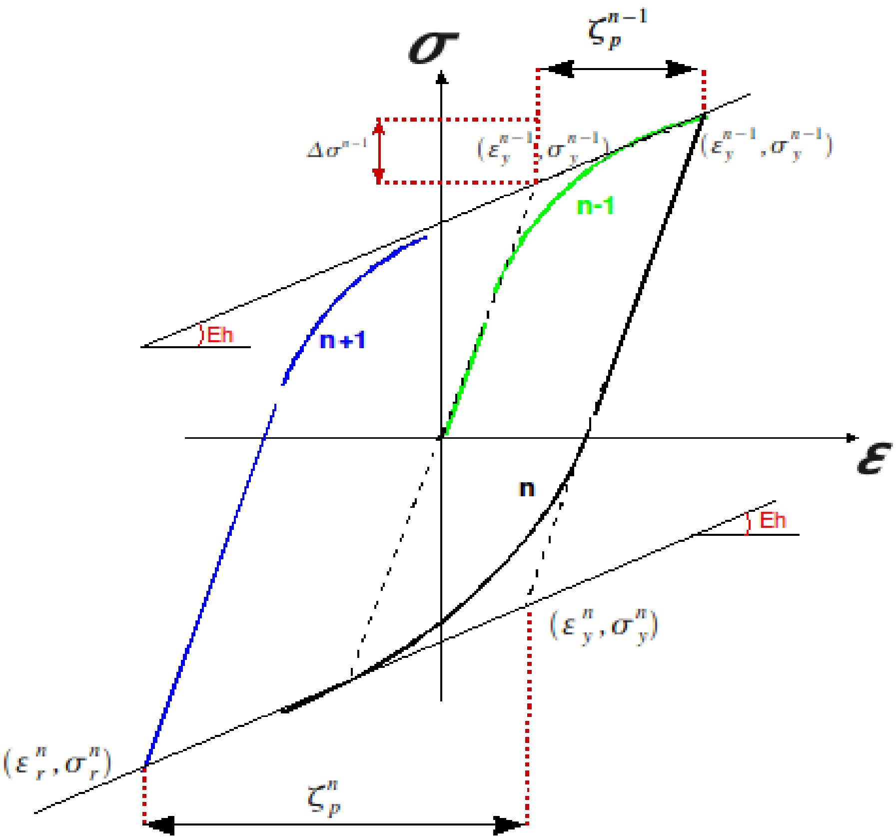


Figure 6.1.3-a : Courbe de comportement cyclique.

6.1.3.1 Compression

On introduit une pente négative $b_c \times E$, où b_c est défini par :

$$b_c = a(5.0 - L/D)e\left(b\zeta' \frac{E}{\sigma_y^0 - \sigma^\infty}\right)$$

Avec $\sigma_\infty = 4.0 \dfrac{\sigma_y^0}{L/D}$ et $\zeta' = \max\left(\left|\zeta_p^n\right|\right)$ le plus grand trajet plastique effectué au cours du chargement.

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer σ_y^n. La méthode est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire σ_s^* afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote [Figure 6.1.3-a].

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} \qquad \text{où } \gamma_s \text{ est donné par : } \gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10\left(e^{cL/D} - 1.0\right)}$$

Et on a donc : $\sigma_y^n = \left(\sigma_y^n\right)_{\text{sans flambage}} + \sigma_s^*$

Ceci modifie aussi la valeur de $\varepsilon_y^n = \varepsilon_r^{n-1} + \dfrac{\sigma_y^n * \sigma_r^{n-1}}{E}$

6.1.3.2 Traction

Lors du demi-cycle en traction suivant on adopte un module d'Young réduit défini par :

$$E_r = E_0\left(a_5 + \left(1.0 - a_5\right)e^{\left(-a_6 \zeta_p^2\right)}\right) \quad \text{avec } a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5$$

Remarque :

Les paramètres a, c *et* a_6 *sont des constantes (sans unité) dépendant des propriétés mécaniques de l'acier et sont déterminées expérimentalement. Les valeurs adoptées par Monti et Nuti [bib 4] sont :* $a=0.006$ $c=0.500$ $a_6=620.0$

6.2 Implantation dans *Code_Aster*

Ce modèle est accessible dans *Code_Aster* à partir du mot clé COMP_INCR (RELATION = 'PINTO_MENEGOTTO') ou (RELATION = 'GRILLE_PINTO_MEN') de la commande STAT_NON_LINE [U4.51.03]. L'ensemble des paramètres du modèle sont donnés via la commande DEFI_MATERIAU (mot clé facteur PINTO_MENEGOTTO) [U4.43.01]. On répertorie ici les paramètres intervenant dans le modèle :

Paramètres du modèle	Intervient dans	valeur adoptée par défaut dans *Aster*
σ_y^0	Premier chargement	–
ε_u	Premier chargement	–
σ_u	Premier chargement	–
ε_h	Premier chargement	–
$b=\frac{E_h}{E}$	Cycles	Si aucune valeur n'est entrée on prend la valeur calculée au premier chargement
R_0	Cycles	20
a_1	Cycles	18.5
a_2	Cycles	0.15
L/D	Cycles avec flambage (si $L/D>5$)	4 (pour être par défaut hors flambage)
a_6	Flambage	620
c	Flambage	0.5
a	Flambage	0.006

Les paramètres R_0, a_1, a_2, a_6, c et a dépendent des propriétés mécaniques de l'acier et sont déterminés expérimentalement. Les valeurs adoptées par défaut dans *Code_Aster* sont celles proposées dans la littérature [bib 1].

On donne en [Figure 6.2-a] une comparaison du modèle suivant la valeur de $b=\frac{E_h}{E}$ pour deux valeurs : $b=0.01$ et $b=0.001$

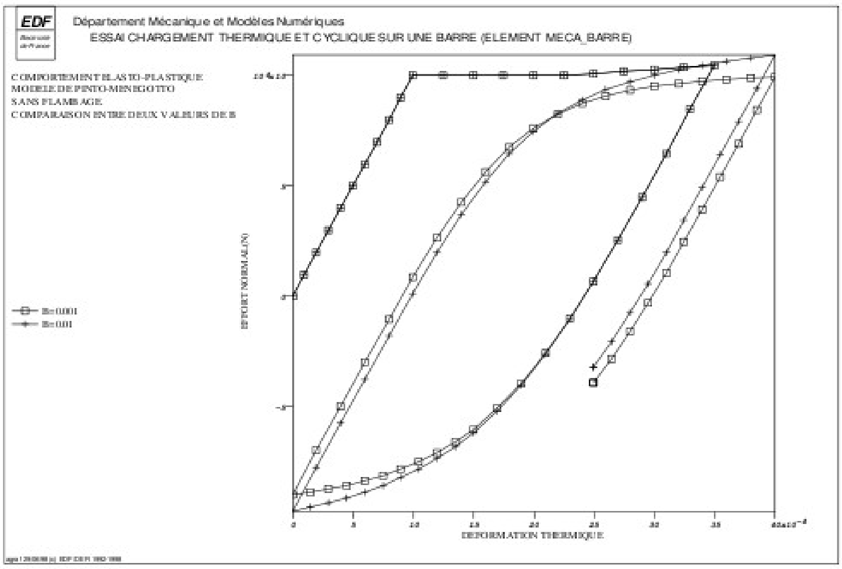


Figure 6.2-a : Comparaison de 2 jeux de paramètres.

On donne en [Figure 6.2-b] une comparaison du modèle sans flambage et du modèle avec flambage.

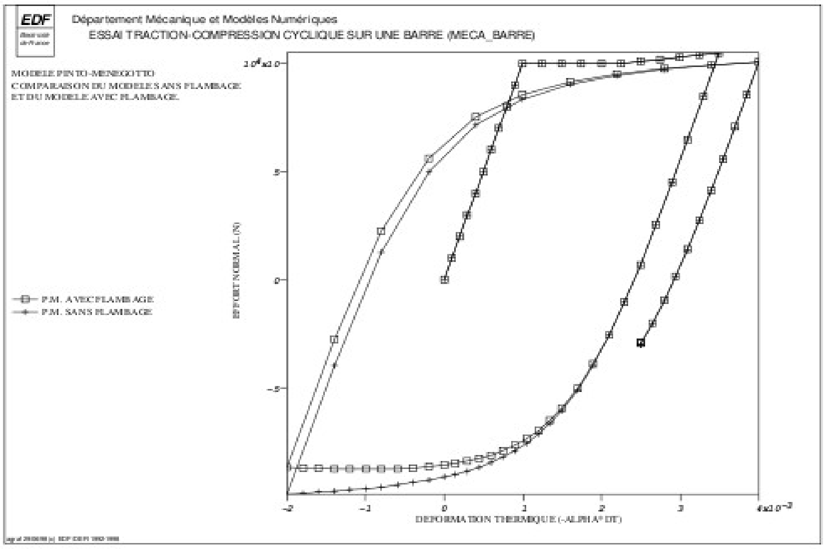


Figure 6.2-b : Comparaison avec et sans flambage.

6.3 Variables internes

Elles sont au nombre de 8, et définies par :

$V1 = \varepsilon_r^{n-1}$

$V2 = \varepsilon,_r^n$

$V3 = \sigma_r^n$

$V4 = \varepsilon^- + \Delta\varepsilon - \alpha\left(T - T^-\right) V5 = \Delta\varepsilon + \alpha\left(T - T^-\right)$

$V6 =$ cycl = 0 si le comportement cyclique n'est pas activé
= 1 dans le cas contraire

$V7 = \chi$ = 0 si le pas de temps correspond à une évolution linéaire
= 1 dans le cas contraire (indicateur de plasticité

$V8 =$ indicateur de flambage

7 Comportement de LEMAITRE (LEMAITRE_IRRA)

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit le comportement viscoélastique non linéaire 1D de J.Lemaître développé pour la modélisation des assemblages combustibles, et applicable aux éléments de poutres, dans la direction axiale [bib 6].

7.1 Formulation du modèle

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp}=\dot{p}\dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \dot{p}=\left[\dfrac{|\sigma|}{p^{\frac{1}{m}}}\right]^{n}\cdot\left(e^{-\frac{Q}{RT}}\right)\cdot\left(\dfrac{\dot{\Phi}}{K\,\Phi_0}+L\right)^{\beta} \quad , \quad \mathrm{n}>0 \quad , \quad \dfrac{1}{\mathrm{K}} \quad , \quad \dfrac{1}{\mathrm{m}}\geq 0 \quad , \quad \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}\geq 0 \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{E}=\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}^{vp}-\dot{\varepsilon}^{g}-\dot{\varepsilon}^{th} \end{cases}$$

Les coefficients sont fournis sous le mot clé `LEMAITRE_IRRA` de `DEFI_MATERIAU` et Φ_t est la fluence.

$$\varepsilon^{g}(t)=f\left(T\,,\Phi_t(x\,,y\,,z)\right)$$

Remarques :

Le flux neutronique $\dot{\Phi}(x\,,y\,,z)$ s'exprime obligatoirement en $10^{20}\,n/cm^2/s$. Ceci implique que les unités des autres grandeurs soient fixées :

- $E\,,K\,,\sigma$ *sont en* MPa *,*
- les temps sont en secondes,
- les coordonnées en mm
- $T\,,\dfrac{Q}{R}$ en Kelvin

Deux types d'intégrations sont disponibles suivant la valeur du mot clé `PARM_THETA` :

- l'intégration purement implicite, si `PARM_THETA =1.0` (valeur par défaut)
- l'intégration semi- implicite, si `PARM_THETA =0.5`

Seules ces deux valeurs sont autorisées.

7.2 Intégration implicite

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon^{vp}=\Delta p\dfrac{\sigma^{-}+\Delta\sigma}{|\sigma^{-}+\Delta\sigma|} \\ \Delta p=\left[\dfrac{|\sigma^{-}+\Delta\sigma|}{\left(p^{-}+\Delta p\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^{n}\cdot\left(e^{-\frac{Q}{RT}}\right)\cdot\left(\dfrac{\Phi-\Phi^{-}}{K\,\Phi_0\,\Delta t}+L\right)^{\beta}\cdot\Delta t \\ \dfrac{\sigma}{E}-\dfrac{\sigma^{-}}{E^{-}}=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{vp}-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th} \\ \text{avec} \\ \Delta\varepsilon^{th}=\alpha(T)\left(T-T_{ref}\right)-\alpha(T^{-})\left(T^{-}-T_{ref}\right) \\ \Delta\varepsilon^{g}=f\left(T^{+},\Phi_t^{+}\right)-f\left(T^{-},\Phi_t^{-}\right) \end{cases}$$

On peut se ramener là encore à une seule équation scalaire non linéaire en Δp , en posant :

$$\sigma^e = \frac{E}{E^-}\sigma^- + E\left(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^g - \Delta\varepsilon^{th}\right)$$

alors le système se réduit à :

$$\begin{cases} \Delta p = \left[\frac{1}{K}\frac{|\sigma|}{\left(p^- + \Delta p\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^n \cdot \left(e^{-\frac{Q}{RT}}\right)\left(\frac{\Delta\Phi}{K\Phi_0\Delta t} + L\right)^{\beta} \cdot \Delta t \\ \sigma^e = \sigma + E\Delta\varepsilon^{\mathrm{vp}} = \sigma + E\Delta p\frac{\sigma}{|\sigma|} = \sigma\left(1 + \frac{E\Delta p}{|\sigma|}\right) \end{cases}$$

et en prenant la valeur absolue des deux membres de la dernière équation, on obtient : $|\sigma^e| = |\sigma| + E\Delta p$

ce qui conduit à résoudre l’équation :

$$\Delta p = \left[\frac{1}{K}\frac{|\sigma^e| - E\Delta p}{\left(p^- + \Delta p\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^n \cdot \left(e^{-\frac{Q}{RT}}\right)\left(\frac{\Delta\Phi}{K\Phi_0\Delta t} + L\right)^{\beta} \cdot \Delta t$$

Une fois cette équation résolue (par une méthode de recherche de zéro de fonction scalaire), on obtient les contraintes par : $\sigma = \dfrac{\sigma^e}{1 + \dfrac{E\Delta p}{|\sigma^e| - E\Delta p}} = \sigma^e\left(1 - \dfrac{E\Delta p}{|\sigma^e|}\right)$

7.3 Intégration semi-implicite

De fait, en élastoplasticité, on utilise l’intégration implicite des modèles de comportement, car la convergence vers la solution du problème continue en temps, est excellente, et conduit de plus à des schémas inconditionnellement stables.

Pour des comportements viscoélastiques ou viscoplastiques, faisant intervenir explicitement le temps physique, la discrétisation implicite mène toujours à des schémas inconditionnellement stables, mais la convergence vers la solution n’est plus aussi rapide. Il est préférable d’utiliser alors une intégration semi-implicite . C’est le choix que nous avons fait ici, suivant en cela l’intégration du modèle de Lemaître dans Aster et dans Cyrano3 [bib 5]. La méthode mise en œuvre ici n’est pas une theta-méthode générale : elle ne fonctionne que pour $theta = 0.5$. Elle permet toutefois d’obtenir des résultats corrects. Pour plus de généralité, il faudrait utiliser une méthode plus sophistiquée, par exemple la méthode de RUNGE KUTTA d’ordre 2 ou 4.

Ici, on écrit simplement :

$$\begin{cases}
\Delta \varepsilon^{vp}=\Delta p\dfrac{\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}}{\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|}\\
\Delta p=\left[\dfrac{1}{K}\dfrac{\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|}{\left(p^-+\dfrac{\Delta p}{2}\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^n\cdot\left(e^{-\frac{Q}{R\left(T+\frac{\Delta T}{2}\right)}}\right)\cdot\left(\dfrac{\Delta\Phi}{K\Phi_0\Delta t}+L\right)^{\beta}\cdot\Delta t\\
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma}{E}-\dfrac{\sigma^-}{E^-}\right)=\dfrac{\Delta\varepsilon}{2}-\dfrac{\Delta\varepsilon^{vp}}{2}-\dfrac{\Delta\varepsilon^{g}}{2}-\dfrac{\Delta\varepsilon^{th}}{2}\\
\Delta\varepsilon_{th}=\alpha(T)\left(T-T_{ref}\right)-\alpha(T^-)\left(T^--T_{ref}\right)\\
\Delta\varepsilon^{g}=f\left(T^+,\Phi_t^+\right)-f\left(T^-,\Phi_t^-\right)
\end{cases}$$

On cherche à calculer $\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}$. On peut écrire :

$$\frac{\sigma}{2}=\frac{\sigma^-}{2}+\frac{\Delta\sigma}{2}=\frac{E}{E^-}\frac{\sigma^-}{2}+\frac{E\,\Delta\varepsilon}{2}-\frac{E\,\Delta\varepsilon^{vp}}{2}-E\frac{\Delta\varepsilon^{g}}{2}-E\frac{\Delta\varepsilon^{th}}{2}$$

donc

$$\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}=\frac{\sigma^-}{2}+\frac{E}{E^-}\frac{\sigma^-}{2}+E\left(\frac{\Delta\varepsilon}{2}-\frac{\Delta\varepsilon^{g}}{2}-\frac{\Delta\varepsilon^{th}}{2}\right)-\frac{E\,\Delta\varepsilon^{v}}{2}$$

Comme précédemment, on résout en posant :

$$\sigma^e=\frac{E}{E^-}\frac{\sigma^-}{2}+\frac{\sigma^-}{2}+e\left(\frac{\Delta\varepsilon}{2}-\frac{\Delta\varepsilon^{g}}{2}-\frac{\Delta\varepsilon^{th}}{2}\right)$$

alors le système se réduit à :

$$\frac{\Delta p}{2}=\left[\frac{1}{K}\frac{\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|}{\left(p^-+\dfrac{\Delta p}{2}\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^n.\left(e^{\frac{-Q}{R\left(T+\frac{\Delta T}{2}\right)}}\right)\left(\frac{\Delta\Phi}{K\Phi_0\Delta t}+L\right)^{\beta}\cdot\frac{\Delta t}{2}$$

$$\sigma^e=\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}+E\frac{\Delta p}{2}\frac{\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}}{\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|}=\left(\sigma^-+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)\left(1+\frac{E\dfrac{\Delta p}{2}}{\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|}\right)$$

d'où : $\left|\sigma^e\right|=\left|\sigma^-+\dfrac{\Delta\sigma}{2}\right|+E\dfrac{\Delta p}{2}$

L'équation à résoudre est exactement de la même forme que l'équation implicite :

$$\frac{\Delta p}{2}=\left[\frac{1}{K}\frac{\left|\sigma^{e}\right|-E\dfrac{\Delta p}{2}}{\left(p^{-}+\dfrac{\Delta p}{2}\right)^{\frac{1}{m}}}\right]^{n}\cdot\left(e^{\frac{-Q}{R\left(T+\frac{\Delta T}{2}\right)}}\right)\left(\frac{\Delta\Phi}{K\,\Phi_0\,\Delta t}+L\right)^{\beta}\cdot\frac{\Delta t}{2}$$

Une fois cette équation résolue, on obtient les variables internes en multipliant par 2 la valeur obtenue et les contraintes par :

$$\sigma^{-}+\frac{\Delta\sigma}{2}=\sigma^{e}\left(1-\frac{E\,\Delta p}{\left|\sigma^{e}\right|}\right)$$

$$\sigma^{-}+\Delta\sigma=2\left(\sigma^{-}+\frac{\Delta\sigma}{2}\right)-\sigma^{-}$$

On peut donc utiliser les mêmes routines de résolution que dans le cas implicite, en calculant simplement σ^{e} en $\frac{\Delta\varepsilon}{2}$, $\frac{\Delta\varepsilon^{g}}{2}$, $\frac{\Delta\varepsilon^{th}}{2}$.

Sur un test élémentaire de fluage (test SSNL109A), on obtient par la méthode semi-implicite un résultat correct (à 0.02% de la solution analytique) si on utilise 2 pas de temps (au lieu de 100 pas de temps nécessaires pour avoir une solution correcte avec intégration implicite).

7.4 Variables internes

Trois variables internes sont calculées dans ce modèle : p, la fluence neutronique calculée au pas de temps courant et la déformation de grandissement ε^{g}.

7.5 Identification des paramètres du modèle

Elle se fait à partir d'essais de fluage (essai uniaxial à contrainte imposée constante sous flux neutronique constant). Par intégration des équations du modèle, on obtient alors :

$$\varepsilon^{vp}(t)=\left[\frac{n+m}{m}\left(\frac{\dot{\Phi}}{K\,\Phi_0}+L\right)^{\beta}e^{\frac{-Q}{RT}}\sigma^{n}\right]^{\frac{m}{n+m}}$$

8 Relation de comportement du LMA-RC (LMARC_IRRA)

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit le comportement viscoplastique 1D du LMA-RC (Laboratoire de Mécanique Appliquée R.Chaléat de Besançon) développé pour la modélisation des assemblages combustibles, et applicable aux éléments de poutres, dans la direction axiale [bib 6].

8.1 Formulation du modèle

Le modèle élasto-viscoplastique développé au LMA-RC pour décrire le comportement orthotrope des tubes de gaines du crayon combustible [R5.03.10] s'écrit en 1D isotrope :

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{\sigma}}{E}=\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}^{vp}-\dot{\varepsilon}^{g}-\dot{\varepsilon}^{th} \\ \dot{\varepsilon}^{vp}=\dot{p}.\xi \\ \xi=\dfrac{(\sigma-X)}{|\sigma-X|} \\ \dot{p}=\dot{\varepsilon}_0\left\{\sin\text{h}\left(\dfrac{|\sigma-X|}{K}\right)\right\}^n \\ \dot{X}=q\left(Y(p)\dot{\varepsilon}^{vp}-\left(X-X^{(1)}\right)\dot{p}\right)-\left\{r_m\sin\text{h}\left(\left(\dfrac{|X|}{X_0}\right)^m\right)\right\}\dfrac{X}{|X|} \\ \dot{X}^{(1)}=q_1\left(Y(p)\dot{\varepsilon}^{vp}-\left(X^{(1)}-X^{(2)}\right)\dot{p}\right) \\ \dot{X}^{(2)}=q_2\left(Y(p)\dot{\varepsilon}^{vp}-X^{(2)}\dot{p}\right) \end{cases}$$

avec : $Y(v)=Y_\infty+\left(Y_0-Y_\infty\right)e^{bp}$

Les coefficients sont, comme en 3D, fournis par le mot clé `LMARC_IRRA` (on n'utilise pas ici les coefficients liés à l'anisotropie) ($q, q_{1,} q_2$ correspondent respectivement aux paramètres $p, p_{1,} p_2$ du mot clé `LMARC_IRRA`).

La loi de grandissement est identique à celle utilisée pour le modèle de Lemaitre :

$$\varepsilon^g(t)=f\left(T,\Phi_t(x,y,z)\right)$$

Le flux neutronique Φ est le produit d'une fonction de x (axe de l'assemblage, devant être confondu avec l'un des axes du repère global) et d'une fonction de y et z.

Remarques :

- La fluence vaut $\Phi_t(x,y,z)$.
- Un seul schéma d'intégration est disponible : un schéma purement implicite.
- Le flux neutronique $\Phi(x,y,z)$ s'exprime obligatoirement en $10^{20}\,n/cm^2/s$. Ceci implique que les unités des autres grandeurs sont fixées :
  - E, K, σ sont en MPa,
  - les temps sont en secondes,
  - les coordonnées en mm.

8.2 Intégration implicite

Pour intégrer ces relations de comportement, en se ramenant si possible à une seule équation à résoudre, il faut faire une hypothèse sur $\xi=\dfrac{(\sigma-X)}{|\sigma-X|}$. En effet, il ne peut prendre que deux valeurs : $+1$ ou -1. On suppose donc ce signe connu (initialisé par $\xi=\dfrac{(\sigma^- - X^-)}{|\sigma^- - X^-|}$). Si on ne peut résoudre l'équation obtenue avec cette hypothèse, on prend le signe opposé. Le reste des équations peut s'intégrer de façon purement implicite. Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma=\sigma^{-}+\Delta\sigma=E\left(\dfrac{\sigma^{-}}{E^{-}}+\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th}-\Delta p\,\xi\right)=\sigma_e-E\,\xi\,\Delta p \\ \Delta p=\dot{\varepsilon}_0\Delta t\left\{\sin\mathrm{h}\left(\dfrac{|\sigma-X|}{K}\right)\right\}^{n}=f_v(\sigma,X)\Delta t \\ \Delta\dot{X}=q\,\Delta p\left(Y(p)\,\dot{\varepsilon}-\left(X-X^{(1)}\right)\right)-\left\{r_m\sin\mathrm{h}\left(\left(\dfrac{|X|}{X_0}\right)^{m}\right)\right\}\dfrac{X}{|X|}=f(p,X,X^{(1)}) \\ \dot{X}^{(1)}=q_1\Delta p\left(\xi\,Y(p)-\left(X^{(1)}-X^{(2)}\right)\right)=f_1(p,X^{(1)},X^{(2)}) \\ \dot{X}^{(2)}=q_2\Delta p\left(\xi\,Y(p)-X^{(2)}\right)=f_2(p,X^{(2)}) \end{cases}$$

On a donc un système de 5 équations à 5 inconnues : $\Delta\sigma,\Delta p,\Delta X,\Delta X^{(1)},\Delta X^{(2)}$
La deuxième équation s'écrit aussi :

$$\frac{|\sigma-X|}{K}=\log\left(\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\left(\frac{\Delta p}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{2}{n}}}\right)$$

En utilisant la première équation, on peut exprimer ΔX en fonction de $\Delta\mathrm{p}$:

$$\sigma-X=\sigma_e-E\,\xi\,\Delta\mathrm{p}-X=\xi|\sigma-X|$$

$$\rightarrow\Delta X=F_1(\Delta\mathrm{p})=\sigma_e-E\,\xi\,\Delta\mathrm{p}-X^{-}-K\,\xi\log\left(\left(\frac{\Delta\mathrm{p}}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\mathrm{p}}{\dot{\varepsilon}_0\Delta t}\right)^{\frac{2}{n}}}\right)$$

D'autre part, par intégration successives des fonctions f_2 et f_1 on peut aussi se ramener à une équation faisant intervenir seulement ΔX et $\Delta\mathrm{p}$:

$$\Delta X^{(2)}=\frac{q_2\Delta\mathrm{p}\left(\xi\,Y(p)-X^{(2)-}\right)}{1+q_2\Delta\mathrm{p}}$$

$$\Delta X^{(1)}=\frac{q_1\Delta\mathrm{p}\left(\xi\,Y(p)-\left(X^{(1)-}-X^{(2)-}-\Delta X^{(2)}\right)\right)}{1+q_1\Delta\mathrm{p}}$$

comme $\Delta X=f\left(p,X,X^{(1)}\right)$, et $\Delta X^{(1)}=g(\Delta p)$ d'après les expressions précédentes on peut écrire : $\Delta X=F_2\left(\Delta p\right)=F_1\left(\Delta p\right)$. L'équation à résoudre pour trouver $\Delta\mathrm{p}$ est donc :

$$F(\Delta\mathrm{p})=F_2(\Delta\mathrm{p})-F_1(\Delta\mathrm{p})=0$$

Une fois calculé $\Delta\mathrm{p}$, on obtient les contraintes par : $\sigma=\sigma_e-E\,\xi\,\Delta\mathrm{p}$

8.3 Variables internes

Elles sont au nombre de 6 :

$$\begin{aligned} V1 &= \mathrm{p} \\ V2 &= X \\ V3 &= X^{(1)} \\ V4 &= X^{(2)} \end{aligned}$$

$V5=$ la fluence neutronique calculé au pas de temps courant.

$V21 =$ la déformation de grandissement ε^g .

8.4 Identification des paramètres du modèle

L'identification des paramètres est effectuée dans la référence [bib 7]. Elle concerne le ZIRCALOY 4 à 350°C.

9 Comportements VISC_IRRA_LOG et GRAN_IRRA_LOG

Le modèle présenté dans ce chapitre décrit les comportements viscoplastiques 1D VISC_IRRA_LOG et GRAN_IRRA_LOG (fluage et grandissement sous irradiation des alliages M5 et Zircaloy-4) pour la modélisation des assemblages combustibles, et applicable aux éléments de barres et poutres multi-fibres.

9.1 Formulation du modèle

Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\varepsilon}\dfrac{\sigma}{|\sigma|} \\ \dot{\varepsilon} = |\sigma| . \left(e^{\frac{-Q}{T}}\right) . \dot{\Phi}\left(\dfrac{A\,\omega}{1+\omega\Phi} + B\right) \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{E} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{vp} - \dot{\varepsilon}^{g} - \dot{\varepsilon}^{th} \end{cases}$$

Ces relations sont déduites des essais de fluage FLETAN et REFLET [8] pour diverses valeurs de flux neutronique.

Les coefficients sont fournis sous le mot clé VISC_IRRA_LOG ou GRAN_IRRA_LOG de DEFI_MATERIAU et Φ est la fluence neutronique (intégrale du flux par rapport au temps).

ε^g représente la déformation de grandissement sous flux. Elle n'est prise en compte que dans le comportement GRAN_IRRA_LOG et s'exprime sous la forme :

$\varepsilon^g(t) = f\left(T, \Phi_t(x, y, z)\right)$

Remarques :

1) *La fluence neutronique $\Phi_t(x, y, z)$ s'exprime obligatoirement en $10^{20}\, n/cm^2$. Par convention dans DEFI_MATERIAU [U4.43.01], si la valeur fournie sous le mot-clé FLUX_PHI est égale à 1, c'est le champ de fluence qui est utilisé pour le comportement. Dans le cas contraire, la valeur fournie dans DEFI_MATERIAU est utilisée comme flux neutronique constant.*
2) *C'est un champ aux nœuds défini comme variable de commande dans la commande AFFE_MATERIAU.*
3) *Attention : Le champ d'irradiation est incrémental et correspond à l'historique d'irradiation (stockée en variable interne – cf ci-dessous) auquel on ajoute l'incrément du champ de fluence venant de la variable de commande.*

9.2 Variables internes

Trois variables internes :

- $V1$: la déformation viscoplastique cumulée : ε_p ;
- $V2$: mémorisation de l'historique d'irradiation (fluence).
- $V3$: la déformation de grandissement : ε^g.

9.3 Intégration implicite

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta\varepsilon^{vp}=\Delta p\dfrac{\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)}{\left|\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)\right|}\\
\Delta p=\left|\sigma\left(t^{-}+\Delta t\right)\right|\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\,\omega}{1+\omega\,\Phi(t^{-}+\Delta t)}+B\right)\Delta\Phi\\
\dfrac{\sigma}{E}-\dfrac{\sigma^{-}}{E^{-}}=\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{vp}-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th}\\
\text{avec}\\
\Delta\varepsilon^{th}=\alpha(T)\left(T-T_{ref}\right)-\alpha(T^{-})\left(T-T_{ref}\right)\\
\Delta\varepsilon^{g}=f\,(T^{+},\Phi_{t}^{+})-f\,(T^{-},\Phi_{t}^{-})
\end{array}\right.$$

On peut résoudre explicitement ces équations en posant : $\sigma^{e}=\dfrac{E}{E^{-}}\sigma^{-}+E(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^{g}-\Delta\varepsilon^{th})$

alors le système se réduit à : $\sigma=\sigma^{e}-E\,\sigma\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\,\omega}{1+\omega\,\Phi}+B\right)\Delta\Phi$

donc la solution s'obtient immédiatement : $\sigma=\dfrac{\sigma^{e}}{1+E\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\,\omega}{1+\omega\,\Phi}+B\right)\Delta\Phi}$

et l'opérateur tangent s'écrit : $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}=\dfrac{E}{1+E\left(e^{\frac{-Q}{T}}\right).\left(\dfrac{A\,\omega}{1+\omega\,\Phi}+B\right)\Delta\Phi}$

10 Modèle de MAZARS en 1D

10.1 Équations du modèle

L'objectif de cette modélisation est de rendre compte de la refermeture des fissures. Ce modèle n'est utilisé qu'avec les poutres multifibres. Les équations présentées dans le document [R7.01.08] "Modèle d'endommagement de MAZARS"sont reprises et réécrites en $1D$.

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=(1-D_t)E\langle\varepsilon^e_{xx}\rangle_+\\ \sigma_{xx}=(1-D_c)E\langle\varepsilon^e_{xx}\rangle_-\end{cases}$$ **[éq]**

avec :

- E : module d'Young,
- D_t : la variable d'endommagement en traction.
- D_c : la variable d'endommagement en compression.
- ε^e_{xx} : la déformation élastique $\varepsilon^e_{xx}=\varepsilon-\varepsilon^{th}$
- $\varepsilon^{th}=\alpha(T-T_{ref})$: la dilatation thermique

La seule modification est d'avoir un endommagement de traction et de compression. Le couplage $\alpha_t^\beta D_t+(1-\alpha_t)^\beta D_C$ n'existe plus. L'endommagement reste toujours piloté par les extensions.

Les endommagements de traction et de compression sont définis par les équations suivantes si $\varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}$:

$$D_c=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_c}{\exp\left[B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\qquad D_c\in[0,1[$$ **[éq 10.1-2**

$$D_t=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}}-\frac{A_t}{\exp\left[B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\qquad D_t\in[0,1[$$ **[éq 10.1-3]**

où $A_c, A_t, B_c, B_t, \varepsilon_{d0}$ sont des paramètres matériaux à identifier.

L'endommagement est piloté par la déformation équivalente ε_{eq}. Les extensions sont primordiales dans le phénomène de fissuration du béton, la déformation équivalente introduite est définie à partir des valeurs positives des déformations, soit :

$$\begin{cases}si\,\varepsilon^e_{xx}\geq0\,alors\,\varepsilon_{eq}=|\varepsilon^e_{xx}|\\ si\,\varepsilon^e_{xx}\leq0\,alors\,\varepsilon_{eq}=\sqrt{2}\,\nu|\varepsilon^e_{xx}|\end{cases}$$ **[éq]**

Remarque :

Dans le cas où $\varepsilon^e_{xx}\leq0$, en $1D$ les déformations principales dans les autres directions sont $\varepsilon^e_{yy}=\varepsilon^e_{zz}=-\nu\,\varepsilon^e_{xx}$. En utilisant la formule $\varepsilon_{eq}=\sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_+^2+\langle\varepsilon_2\rangle_+^2+\langle\varepsilon_3\rangle_+^2}$ on obtient bien l'expression précédente.

La matrice tangente à pour expression : $\dfrac{d\,\sigma_{xx}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=(1-\tilde{D})\,E-\dfrac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}\,E\,\varepsilon^e_{xx}$ avec :

$$si\,\varepsilon^e_{xx}\geq0\,et\,\varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}\quad\frac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\quad\frac{d\,D_t}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\quad\left(\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_t)}{\varepsilon^2_{eq}}+\frac{A_tB_t}{\exp\left[B_t(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\right)$$

$$si\,\varepsilon^e_{xx}<0\,et\,\varepsilon_{eq}\geq\varepsilon_{d0}\quad\frac{d\,\tilde{D}}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\quad\frac{d\,D_c}{d\,\varepsilon^e_{xx}}=\quad-\sqrt{2}\,\nu\left(\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_c)}{\varepsilon^2_{eq}}+\frac{A_cB_c}{\exp\left[B_c(\varepsilon_{eq}-\varepsilon_{d0})\right]}\right)$$

Les cas test [V6.02.120], [V6.02.119], [V5.02.130] mettent en œuvre la loi de comportement de MAZARS dans sa version $1D$.

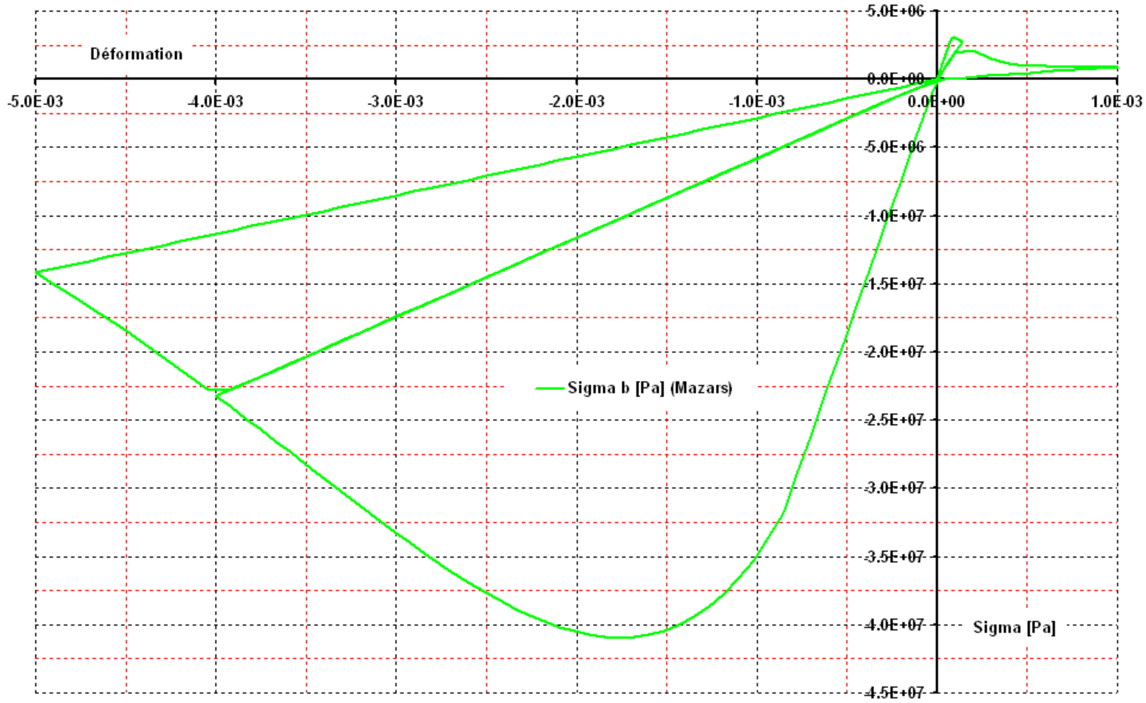


Figure 10.1-a : Comportement de Mazars dans sa version $1D$.

10.2 Variables internes

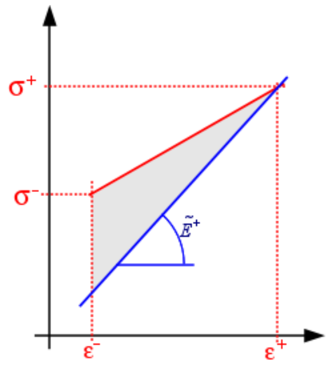
La loi de comportement est écrite en découplant les endommagements de traction et de compression, les 2 endommagements s ont des variables internes : ENDO_T, ENDO_C.

Cette loi est dédiée aux calculs de génie civil. Pour faciliter les interprétations des résultats 2 variables sont créées pour décrire l'état "limite" du matériau béton, conformément à ce qui ce fait dans les règlements de calcul de béton armé aux états limites.

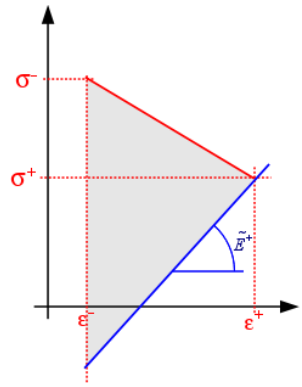
- La variable SIGMLIM donne des informations par rapport à l'état de contrainte. Cette variable représente la contrainte divisée par la contrainte limite du béton donnée par l'utilisateur SIGM_LIM.
- La variable EPSILIM donne des informations par rapport à l'état de déformation. Cette variable représente la déformation équivalente ε_{eq} divisée par la déformation limite donnée par l'utilisateur à l'aide du mot clef EPSI_LIM.

Les valeurs de la contrainte limite SIGM_LIM et de la déformation limite EPSI_LIM sont modifiables par l'utilisateur au moment de la définition du matériau : DEFI_MATERIAU [U4.43.01], DEFI_MATER_GC 7].

L'écriture de la loi de MAZARS ne permet pas de calculer une dissipation intrinsèque au modèle. Mais, lors de calculs sismiques il peut être utile à l'utilisateur de connaître l'énergie dissipée non récupérable. La variable DISSIP représente le cumul d'énergie non récupérable. L'incrément d'énergie non récupérable s'écrit $\Delta Eg=\frac{1}{2}\left(E(1-D^{+})\Delta\varepsilon-\left(\sigma^{+}-\sigma^{-}\right)\right)\Delta\varepsilon$.



Matériau non-adoucissant



Matériau adoucissant

Les variables internes pour la loi de MAZARS en $1D$:

- $V1$ SIMGLIM : contrainte normée
- $V2$ EPSILIM : déformation normée.
- $V3$ ENDO_T : endommagement en traction.
- $V4$ ENDO_C : endommagement en compression.
- $V5$ DISSIP : énergie non récupérable.

11 Méthode pour utiliser en 1D tous les comportements 3D

Comme pour le traitement des contraintes planes [R5.03.03], il est possible de bénéficier pour les modélisations 1D des comportements disponibles en 3D. On étend pour cela la méthode due à R.de Borst au cas 1D, en traitant cette condition (champ de contraintes unidimensionnel) non pas au niveau de la loi de comportement mais au niveau de l'équilibre. On obtient ainsi au cours des itérations de l'algorithme de `STAT_NON_LINE` des champs de contraintes qui tendent vers un champ unidirectionnel. On vérifie, à convergence des itérations de Newton globales, que les champs de contraintes sont effectivement unidirectionnels, à une précision près, sinon on continue les itérations. La méthode consiste à décomposer les champs de déformations et de contraintes en une partie purement unidirectionnelle (direction x) et une partie relative aux autres directions, et d'effectuer une condensation statique en écrivant que les composantes des contraintes relatives aux autres directions sont nulles. On ne considère dans les tenseurs (d'ordre 2) que les termes diagonaux, écrits sous forme de vecteurs à 3 composantes. La direction x correspond à la direction de l'élément (barre, poutre multifibre) ou à la direction des armatures de grille. A un instant quelconque de la résolution du comportement incrémental, l'opérateur tangent D relie l'accroissement de contraintes à l'accroissement de déformation par : $d\sigma=\left[\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right]d\varepsilon=D\,d\varepsilon$ que l'on réécrit :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

En écrivant ces accroissements comme la différence entre les itérations n et $n+1$ de Newton, on obtient :

$$d\sigma=\sigma^{n+1}-\sigma^n=\Delta\sigma^{n+1}-\Delta\sigma^n \;,\; d\varepsilon=\Delta\varepsilon^{n+1}-\Delta\varepsilon^n$$

A convergence, cet écart doit tendre vers zéro.

En introduisant les conditions $\sigma_y^{n+1}=0$ et σ_z^{n+1} (comportement unidirectionnel), on obtient, pour l'itération $n+1$:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_x^{n+1}-\sigma_x^n \\ \sigma_y^{n+1}-\sigma_y^n \\ \sigma_z^{n+1}-\sigma_z^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_x^{n+1}-\sigma_x^n \\ -\sigma_y^n \\ -\sigma_z^n \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer $d\varepsilon_y$ et $d\varepsilon_z$ en fonction de $d\varepsilon_x$:

$$\begin{cases} d\varepsilon_y=\dfrac{1}{D_{22}}\left(-\sigma_y^n-D_{21}\,d\varepsilon_x-D_{23}\,d\varepsilon_z\right) \\ d\varepsilon_z=\dfrac{1}{D_{33}}\left(-\sigma_z^n-D_{31}\,d\varepsilon_x-D_{32}\,d\varepsilon_y\right) \end{cases}$$

soit

$$d\varepsilon_y=\frac{1}{\Delta}\left(-D_{33}\,\sigma_y^n+D_{23}\,\sigma_z^n+D_y\,d\varepsilon_x\right)$$

$$d\varepsilon_z=\frac{1}{\Delta}\left(-D_{32}\,\sigma_y^n+D_{22}\,\sigma_z^n+D_z\,d\varepsilon_x\right)$$

avec $\Delta=D_{33}D_{22}-D_{23}D_{32},\quad D_y=D_{23}D_{31}-D_{21}D_{33},\quad D_z=D_{32}D_{21}-D_{31}D_{22}$

en reportant ces expressions dans la première équation, on obtient :

$$\sigma_x^{n+1}=\sigma_x^n+\left(D_{11}+\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}\right)d\varepsilon_x+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n$$

L'équilibre à l'itération $n+1$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\int D^T\sigma^{n+1}dv=\int B^T\sigma_x^{n+1}dv=\int B^T\left(D_{11}+\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}\right)d\varepsilon_x\\+\int B^T\left(\sigma_x^n+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n\right)dv\\=K^n du^{n+1}+\int B^T\left(\sigma_x^n+\frac{D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13}}{\Delta}\sigma_z^n+\frac{D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33}}{\Delta}\sigma_y^n\right)dv\end{aligned}$$

On constate donc que la prise en compte du comportement unidimensionnel intervient à deux niveaux :

- dans la matrice tangente, par le terme correctif :

$$\int B^T\frac{D_{12}D_y+D_{13}D_z}{\Delta}B\ dv$$

- dans l'écriture du second membre, par le terme correctif :

$$\frac{\int B^T}{\Delta}\left((D_{12}D_{23}-D_{22}D_{13})\sigma_z^n+(D_{12}D_{32}-D_{12}D_{33})\sigma_y^n\right)dv$$

Pour mettre en œuvre cette méthode, il suffit de calculer ces termes correctifs et de les ajouter aux contraintes et matrice tangente obtenue de la résolution 3D du comportement. Pour cela il est nécessaire de stocker des informations d'une itération de Newton à l'autre, par le biais de 4 variables internes supplémentaires. Les étapes de la résolution sont :

- à l'itération $n+1$, les données sont : $\Delta u^{n+1},\sigma^-,\alpha^-$ et les 4 variables internes (calculées à l'itération n) :

$$V1=\Delta\varepsilon_y^n+\frac{1}{\Delta}\left(D_{23}\sigma_z^n-D_{33}\sigma_y^n-D_y\Delta\varepsilon_x^n\right),V2=\frac{D_y}{\Delta}$$

$$V3=\Delta\varepsilon_z^n+\frac{1}{\Delta}\left(D_{32}\sigma_z^n-D_{22}\sigma_z^n-D_z\Delta\varepsilon_x^n\right),V4=\frac{D_z}{\Delta}$$

- avant d'effectuer l'intégration du comportement (effectué en axisymétrique) on calcule :

$$\Delta\varepsilon_y^{n+1}=\Delta\varepsilon_y^n+\frac{1}{\Delta}\left(-D_{33}\sigma_y^n+D_{23}\sigma_z^n+D_y d\varepsilon_x\right)$$

$$\Delta\varepsilon_z^{n+1}=\Delta\varepsilon_z^n+\frac{1}{\Delta}\left(-D_{32}\sigma_y^n+D_{22}\sigma_z^n+D_z d\varepsilon_x\right)$$

- l'intégration du comportement fournit les contraintes σ^{n+1} et l'opérateur tangent D ,
- on modifie le second membre et la matrice tangente comme indiqué ci-dessus,
- on stocke les nouvelles variables internes et on vérifie si $\left|\sigma_z^{n+1}\right|<\eta$ et $\left|\sigma_y^{n+1}\right|<\eta$, avec $\eta=\xi\left|\sigma_x^{n+1}\right|$, $\xi=$ `RESI_INTE_RELA`

Remarque :

> *Les 4 variables internes supplémentaires sont ajoutées après les variables internes de la loi de comportement.*

12 Bibliographie

[1] J.GUEDES, P.PEGON, P.E.PINTO : ''A Fibre/Timoshenko Beam Element in Castem 2000'', Joint Research Centre, European Commission, Institute for Safety Technology,1994.

[2] A.GIUFFRE, P.E.PINTO : ''Il Comportemento del Cemento Armatoper Sollecitazioni Cicliche di Forte Intensita''', Giornale del Genio Civile, Maggio 1970.

[3] M.MENEGOTTO, P.E.PINTO : ''Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-elastic Behaviour of Elements under Combined Normal Force and Bending'', IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted On by Well-Defied Repeated Loads, Final Report, Lisbon, 1973.

[4] G.MONTI, C.NUTI : ''Non-linear Cyclic Behaviour of Reinforcing Bars Including Buckling'', Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No 12, December 1992.

[5] P.DE BONNIERES, M.ZIDI : « Introduction de la viscoplasticité dans le modules de thermomécanique de CYRANO3 : principe, description et validation » Note HI-71/8334.

[6] J.M.PROIX, B.QUINNEZ, P.MASSIN, P.LACLERGUE : « Assemblages combustibles sous irradiation. Étude de faisabilité ». Note HI-75/97/017/0.

[7] I. LE PICHON, P. GEYER : « Modélisation du comportement viscoplastique anisotrope des tubes de gainage des crayons combustibles » Note HT-B2/95/018/A

[8] L. RANCŒUR : « Comportement en fluage axial sous irradiation des tubes guides en M5 et Zircaloy-4 recristallisés » note MMC HT25-C2004-192/LRC du 25/10/2004.

13 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8.4	J.M. PROIX, EDF-R&D/AMA B. QUINNEZ, EDF-R&D/AMA C. CHAVANT, EDF-R&D/AMA	Texte initial
10.2	J-L.FLÉJOU	Correction formules
11.2	J-L.FLÉJOU	Ajout `ECRO_LINE_1D`