

Matrices gyroscopiques des poutres droites et des disques

Résumé :

Ce document présente la formulation des matrices d'amortissement et de raideur gyroscopiques des éléments poutres et du disque indéformable.

Les poutres sont uniquement des poutres droites (Éléments `POU_D_T` et `POU_D_E`). La section est constante sur la longueur et de forme circulaire. Le matériau est homogène, isotrope.

Les disques sont des cylindres de révolution dont l'axe est confondu avec l'axe de la poutre. Le disque est supposé indéformable.

Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- Hypothèse de Timoshenko : le cisaillement transverse et tous les termes d'inertie sont pris en compte. Cette hypothèse est à utiliser pour des élancements faibles (Éléments `POU_D_T`).
- Hypothèse d'Euler : le cisaillement transverse est négligé. Cette hypothèse est vérifiée pour de forts élancements (Éléments `POU_D_E`).

La vitesse de rotation propre (suivant l'axe de la poutre) peut être constante ou variable.

Dans Code_Aster, la convention adoptée définit le sens positif suivant l'axe de rotation comme étant le sens **trigonométrique** usuel de rotation.

Table des Matières

1 Introduction	3
1.1 Définition des repères.....	3
2 L'élément poutre de section circulaire constante.....	4
2.1 Caractéristiques.....	4
2.2 Calcul de l'énergie cinétique de la poutre de Timoshenko.....	4
2.3 Fonctions d'interpolation.....	5
2.4 Calcul des équations d'équilibre.....	8
3 Le disque circulaire.....	9
3.1 Calcul de l'énergie cinétique du disque.....	10
3.2 Calcul des équations d'équilibre.....	10
4 Description des versions.....	12

1 Introduction

Une poutre est un solide engendré par une surface d'aire S , dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe C appelée fibre moyenne ou fibre neutre.

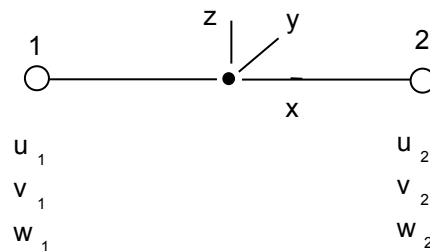
Dans le cadre de cette modélisation, seules les poutres droites, à section constante et circulaire sont prise en compte.

Pour l'étude des poutres en général, on formule les hypothèses suivantes :

- La section droite de la poutre est indéformable,
- Le déplacement transversal est uniforme sur la section droite.

Ces hypothèses permettent d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la section, en fonction d'un accroissement de déplacement dû à la rotation de la section autour des axes transversaux.

La discrétisation en éléments « exacts » de poutre s'effectue sur un élément linéique à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Ces degrés de libertés se décomposent en trois translations u , v , w (déplacements suivant les directions x , y et z) et trois rotations θ_x , θ_y et θ_z (autour des axes x , y et z).



Dans le cas des poutres droites, la ligne moyenne est suivant l'axe x de la base locale, les déplacement transversaux s'effectuant ainsi dans le plan (y, z) .

Pour le stockage des grandeurs liées aux degrés de liberté d'un élément dans un vecteur ou une matrice élémentaire (donc de dimension 12 ou 12^2), on range d'abord les variables pour le nœud 1 puis celles du nœud 2. Pour chaque nœud, on stocke d'abord les grandeurs liées aux trois translations, puis celles liées aux trois rotations. Par exemple, un vecteur déplacement sera structuré de la manière suivante :

$$\underbrace{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}}_{\text{sommet 1}}, \underbrace{u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}}_{\text{sommet 2}}$$

1.1 Définition des repères

On définit :

- x est l'axe de la fibre neutre de la poutre,
- y et z sont les axes principaux d'inertie de la section,
- R_0 est le repère absolu lié à une section dans la configuration initiale,
- R est le repère lié à une section dans la configuration déformée,

En ne considérant pas la torsion, le passage du repère R_0 au repère R s'effectue à l'aide 3 rotations, deux suivant y et z , et une rotation autour de x , notée ϕ , telle que :

$\dot{\phi}$: vitesse de rotation propre de l'arbre

2 L'élément poutre de section circulaire constante

2.1 Caractéristiques

Chaque élément est un élément poutre isoparamétrique de section circulaire et constante. On prend en compte le cisaillement transverse dans la formulation de cet élément (poutre droite de Timoshenko).

Notations :

- x est l'axe de la fibre neutre de la ligne d'arbre,
- masse volumique : ρ
- longueur de l'élément : L
- module d'Young : E
- module de Poisson : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
- section :
 - rayon intérieur : R_i
 - rayon extérieur : R_e
 - aire : $A = \pi (R_e^2 - R_i^2)$
 - inertie polaire : $I_x = \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4)$
 - inertie de section : $I_{yz} = I_y = I_z = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4)$

2.2 Calcul de l'énergie cinétique de la poutre de Timoshenko

On calcule l'énergie cinétique de l'élément poutre de Timoshenko en considérant les déformations de membrane et de flexion. L'expression de l'énergie cinétique s'obtient en intégrant sur la longueur de l'élément poutre :

$$T = \frac{1}{2} \rho \cdot A \int_{x=0}^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx + \frac{1}{2} \rho \cdot \int_{x=0}^L \vec{\Omega}_{R/R0} \cdot [J] \cdot \vec{\Omega}_{R/R0} dx$$

avec : $[J] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$ avec I (en m^4)

Soit une poutre droite d'axe $o\vec{x}$ pour la configuration non déformée, il est nécessaire de définir deux bases intermédiaires pour caractériser le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R/R0}$.

- Passage de la base $B(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à la base $B_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par une rotation d'axe $o\vec{y}$ d'amplitude $\theta_y(x, t)$ tel que :
 $\vec{y}_1 = \vec{y}$
- Passage de la base $B(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ à la base $B_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par une rotation d'axe $o\vec{z}_1$ d'amplitude $\theta_z(x, t)$ tel que :
 $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et $\vec{y}_2 = \cos \theta_z(x, t) \cdot \vec{y}_1 + \sin \theta_z(x, t) \cdot \vec{x}_1$
- La rotation à la vitesse angulaire $\dot{\phi}(t)$ a lieu suivant l'axe $o\vec{x}_2$.

- Ainsi le vecteur de rotation s'écrit : $\vec{\Omega}_{R/R0} = \dot{\phi}(t) \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta}_y(x, t) \cdot \vec{y}_1 + \dot{\theta}_z(x, t) \cdot \vec{z}_1$
- Étant donné que l'opérateur $[J]$ de l'élément poutre est écrit dans la base B_2 qui correspond à la position déformée, il est impératif à moins de changer de base l'opérateur d'inertie, d'écrire le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R/R0}$ dans la base B_2 .

$$\vec{\Omega}_{R/R0} = \dot{\phi}(t) \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta}_y(x, t) \cdot (\cos \theta_z(x, t) \cdot \vec{y}_2 + \sin \theta_z(x, t) \cdot \vec{x}_2) + \dot{\theta}_z(x, t) \cdot \vec{z}_2$$

- En considérant que les angles $\theta_y(x, t)$ et $\theta_z(x, t)$ sont petits, il est légitime d'effectuer un développement limité à l'ordre 1. L'expression du vecteur vitesse $\vec{\Omega}_{R/R0}$ devient alors :

$$\vec{\Omega}_{R/R0} = (\dot{\phi}(t) + \dot{\theta}_y(x, t) \cdot \theta_z(x, t)) \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta}_y(x, t) \cdot \vec{y}_2 + \dot{\theta}_z(x, t) \cdot \vec{z}_2$$

- Il reste à développer le produit scalaire suivant :

$$\frac{1}{2} \rho \int_{x=0}^L \vec{\Omega}_{R/R0} \cdot [J] \cdot \vec{\Omega}_{R/R0} dx = \frac{1}{2} \rho I_{yz} \int_{x=0}^L [\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2] dx + \frac{1}{2} \rho I_x \cdot L \cdot \dot{\phi}^2 + \rho \dot{\phi} I_x \int_{x=0}^L \dot{\theta}_y \cdot \theta_z dx$$

Pour un élément poutre de section constante, l'expression devient :

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_{x=0}^L [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dx + \frac{1}{2} \rho I_{yz} \int_{x=0}^L [\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2] dx + \frac{1}{2} \rho I_x \cdot L \cdot \dot{\phi}^2 + \rho \dot{\phi} I_x \int_{x=0}^L \dot{\theta}_y \cdot \theta_z dx$$

Avec :

$$I_x = \frac{\pi}{2} \cdot [R_e^4 - R_e^4]$$

$$I_{yz} = I_y = I_z = \frac{\pi}{4} \cdot [R_e^4 - R_e^4]$$

Les différents termes de l'énergie cinétique représentent :

- pour le premier terme, l'énergie cinétique de translation,
- pour les deux termes suivants, l'énergie cinétique de rotation,
- pour le quatrième terme, le terme d'effet gyroscopique.

2.3 Fonctions d'interpolation

Pour les déformations de membrane (traction – compression), le champ $u(x)$ est approché par une fonction linéaire des déplacements des nœuds 1 et 2 de l'élément poutre :

$$u(x) = \langle N_1^L(x) \ N_2^L(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1^L(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2^L(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$

Pour les déformations de flexion, on utilise des fonctions cubiques de type Hermite modifié. Les degrés de libertés $v(x)$, $\theta_y(x)$, $w(x)$, $\theta_z(x)$ sont donc interpolés comme suit :

$$v(x) = \langle \xi_1(x) \quad -\xi_2(x) \quad \xi_3(x) \quad -\xi_4(x) \rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{pmatrix}$$

$$\theta_z(x) = \langle -\xi_5(x) \quad \xi_6(x) \quad -\xi_7(x) \quad \xi_8(x) \rangle \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{pmatrix}$$

$$w(x) = \langle \xi_1(x) \quad \xi_2(x) \quad \xi_3(x) \quad \xi_4(x) \rangle \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{pmatrix}$$

$$\theta_y(x) = \langle \xi_5(x) \quad \xi_6(x) \quad \xi_7(x) \quad \xi_8(x) \rangle \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{pmatrix}$$

On définit K_{yz} coefficient de cisaillement dans les directions y et z .

Pour un élément poutre de section constante :

$$K_{yz} = \frac{7+20 \cdot \alpha^2}{6} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{R_i}{R_e \cdot \left(1 + \frac{R_i^2}{R_e^2}\right)}$$

En notant $\phi_{yz} = \frac{12 \cdot E \cdot I_{yz}}{K_{yz} \cdot A \cdot G \cdot L^2}$, les fonctions ξ_i sont définies ainsi :

$$\xi_1(x) = \frac{1}{1+\phi_{yz}} \left[2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi_{yz} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi_{yz}) \right]$$

$$\xi_5(x) = \frac{6}{L \cdot (1+\phi_{yz})} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\xi_2(x) = \frac{L}{1+\phi_{yz}} \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{4+\phi_{yz}}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{2+\phi_{yz}}{2} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\xi_6(x) = \frac{1}{1+\phi_{yz}} \left[3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi_{yz}) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi_{yz}) \right]$$

$$\xi_3(x) = \frac{1}{1+\phi_{yz}} \left[-2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \phi_{yz} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\xi_7(x) = \frac{-6}{L \cdot (1+\phi_{yz})} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\xi_4(x) = \frac{L}{1 + \phi_{yz}} \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{2 - \phi_{yz}}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{\phi_{yz}}{2} \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\xi_8(x) = \frac{1}{1 + \phi_{yz}} \left[3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + (-2 + \phi_{yz}) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

Remarque :

Dans le cas d'éléments poutres d'Euler (Éléments `POU_D_E`) le terme ϕ_{yz} est nul.

Le vecteur des degrés de liberté de l'élément poutre est défini par :

$$\langle q \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \rangle$$

On pose :

$$\langle \delta u \rangle = \langle u_1 \ u_2 \rangle$$

$$\langle \delta v \rangle = \langle v_1 \ \theta_{z1} \ v_2 \ \theta_{z2} \rangle$$

$$\langle \delta w \rangle = \langle w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2} \rangle$$

En remplaçant les approximations précédentes dans l'expression de l'énergie cinétique, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \langle \delta \dot{u} \rangle [M_1] \langle \delta \dot{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{w} \rangle ([M_2] + [M_4]) \langle \delta \dot{w} \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta \dot{v} \rangle ([M_3] + [M_5]) \langle \delta \dot{v} \rangle$$

$$+ \dot{\phi} \cdot \langle \delta \dot{v} \rangle [M_6] \langle \delta \dot{w} \rangle + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot I_x \cdot \dot{\phi}^2$$

Avec :

$$[M_1] = \int_{x=0}^L \rho \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} N_1^L(x) \\ N_2^L(x) \end{Bmatrix} \cdot \langle N_1^L(x) \ N_2^L(x) \rangle \cdot dx$$

$$[M_2] = \int_{x=0}^L \rho \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \\ \xi_3(x) \\ \xi_4(x) \end{Bmatrix} \cdot \langle \xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \xi_3(x) \ \xi_4(x) \rangle \cdot dx$$

$$[M_3] = \int_{x=0}^L \rho \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \xi_1(x) \\ -\xi_2(x) \\ \xi_3(x) \\ -\xi_4(x) \end{Bmatrix} \cdot \langle \xi_1(x) \ -\xi_2(x) \ \xi_3(x) \ -\xi_4(x) \rangle \cdot dx$$

$$[M_4] = \int_{x=0}^L \rho \cdot I_{yz} \cdot \begin{Bmatrix} \xi_5(x) \\ \xi_6(x) \\ \xi_7(x) \\ \xi_8(x) \end{Bmatrix} \cdot \langle \xi_5(x) \ \xi_6(x) \ \xi_7(x) \ \xi_8(x) \rangle \cdot dx$$

$$[M_5] = \int_{x=0}^L \rho \cdot I_{yz} \cdot \begin{pmatrix} -\xi_5(x) \\ \xi_6(x) \\ -\xi_7(x) \\ \xi_8(x) \end{pmatrix} \cdot \langle -\xi_5(x) \quad \xi_6(x) \quad -\xi_7(x) \quad \xi_8(x) \rangle \cdot dx$$

$$[M_6] = \int_{x=0}^L \rho \cdot I_x \cdot \begin{pmatrix} -\xi_5(x) \\ \xi_6(x) \\ -\xi_7(x) \\ \xi_8(x) \end{pmatrix} \cdot \langle \xi_5(x) \quad \xi_6(x) \quad \xi_7(x) \quad \xi_8(x) \rangle \cdot dx$$

2.4 Calcul des équations d'équilibre

Les équations de Lagrange pour l'énergie cinétique de la poutre s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec } \langle q \rangle = \langle u \ v \ w \rangle$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial (\delta \dot{u})} \right) - \frac{\partial T}{\partial (\delta u)} = [M_1] [(\delta \ddot{u})] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial (\delta \dot{v})} \right) - \frac{\partial T}{\partial (\delta v)} = ([M_3] + [M_5]) [(\delta \ddot{v})] - \dot{\phi} \cdot [M_6] [(\delta \dot{w})] - \ddot{\phi} \cdot [M_6] [(\delta w)] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial (\delta \dot{w})} \right) - \frac{\partial T}{\partial (\delta w)} = ([M_2] + [M_4]) [(\delta \ddot{w})] + \dot{\phi} \cdot [M_6]^T [(\delta \dot{v})] \end{cases}$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$[M] \langle \ddot{q} \rangle + [C_{gyro}] \langle \dot{q} \rangle + ([K] + [K_{gyro}]) \langle q \rangle = \langle 0 \rangle$$

La matrice d'amortissement gyroscopique $[C_{gyro}]$ du système est constituée à partir de la matrice $[M_6]$ et de sa transposée. Elle est antisymétrique, et sa contribution doit être multipliée par la vitesse angulaire $\dot{\phi}$.

En notant : $\phi = \phi_{yz}$

$$[M_6] = \frac{\rho \cdot I_x}{30L(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} -36 & 3L(1-5\phi) & 36 & 3L(1-5\phi) \\ -3L(1-5\phi) & L^2(4+5\phi+10\phi^2) & 3L(1-5\phi) & -L^2(1+5\phi-5\phi^2) \\ 36 & -3L(1-5\phi) & -36 & 3L(-1+5\phi) \\ -3L(1-5\phi) & -L^2(1+5\phi-5\phi^2) & -3L(-1+5\phi) & L^2(4+5\phi+10\phi^2) \end{bmatrix}$$

$$[C_{gyro}] = \frac{\rho \cdot I_x}{30 L (1 + \phi)^2} \times$$

-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	36	-	-3L(1-5φ)	0	-	0	-36	-	-3L(1-5φ)	0
	0	-	0	-3L(1-5φ)	-	36	-	0	-	-3L(1-5φ)
		-	0	L ² (4+5φ+10φ ²)	-	-3L(1-5φ)	-	0	-	-L ² (1+5φ-5φ ²)
			0	0	-	0	-3L(1-5φ)	-	L ² (1+5φ-5φ ²)	0
					-	0	36	-	3L(1-5φ)	0
							0	-	0	3L(1-5φ)
								-	0	L ² (4+5φ+10φ ²)
										0

Comme la matrice $[C_{gyro}]$ est anti-symétrique, seul le triangle supérieur est représenté.
(-) signifie que le degré de liberté n'est pas concerné par les matrices gyroscopiques.

La matrice de raideur gyroscopique $[K_{gyro}]$ du système est constituée à partir de la matrice $[M_6]$.
Sa contribution doit être multipliée par l'accélération angulaire $\ddot{\phi}$.

$$[K_{gyro}] = \frac{\rho \cdot I_x}{30 L (1 + \phi)^2} \times$$

-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	0	36	-	-3L(1-5φ)	0	-	0	-36	-	-3L(1-5φ)
-	0	0	-	0	0	-	0	-	0	0
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	0	0	-	0	0	-	0	-	0	0
-	0	3L(1-5φ)	-	-L ² (4+5φ+10φ ²)	0	-	0	-3L(1-5φ)	-	L ² (1+5φ-5φ ²)
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	0	-36	-	3L(1-5φ)	0	-	0	36	-	3L(1-5φ)
-	0	0	-	0	0	-	0	-	0	0
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	0	0	-	0	0	-	0	-	0	0
-	0	3L(1-5φ)	-	L ² (4+5φ+10φ ²)	0	-	0	-3L(1-5φ)	-	-L ² (4+5φ+10φ ²)

La matrice pleine $[K_{gyro}]$ est remplie en entier (triangles supérieur et inférieur).

Rappel :

- avec $\langle q \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2} \rangle$
- dans le cas d'éléments poutres d'Euler (Éléments POU_D_E) le terme ϕ_{yz} est nul.

3 Le disque circulaire

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les matrices gyroscopiques d'un disque circulaire infiniment rigide, soumis à une vitesse de rotation constante ou variable.

Les caractéristiques du disque sont les suivantes :

- axe du disque confondu avec l'axe de la fibre neutre de la poutre (axe \vec{x})
- centre de gravité du disque : C
- rayon intérieur : R_i

- rayon extérieur : R_e
- épaisseur : h
- masse volumique supposée uniforme : ρ

Valeurs déduites :

- masse du disque : $M = \pi \rho h (R_e^2 - R_i^2)$
- moment d'inertie massique / axes y ou z calculé au centre de gravité C :

$$I_{yz} = \frac{M}{12} (3 \cdot R_e^2 + 3 \cdot R_i^2 + h^2)$$
- moment d'inertie massique par rapport à l'axe x calculé au centre de gravité C :

$$I_x = \frac{M}{2} (R_e^2 + R_i^2)$$

Remarques :

- Les axes $C\vec{x}$, $C\vec{y}$ et $C\vec{z}$ étant axes principaux d'inertie du disque, les produits d'inertie I_{xy} , I_{yz} et I_{xz} sont nuls.
- La symétrie du disque par rapport aux axes $C\vec{y}$ et $C\vec{z}$ impose : $I_{yz} = I_y = I_z$

Le déplacement du centre du disque est donné par : $u \cdot \vec{x} + v \cdot \vec{y} + w \cdot \vec{z}$

On note :

- $\vec{\Omega}_{R/R0}$: le vecteur vitesse de rotation du disque
- $\vec{x} \cdot \vec{\Omega}_{R/R0} = \dot{\phi}(t)$: vitesse de rotation propre

3.1 Calcul de l'énergie cinétique du disque

On calcule l'énergie cinétique du disque en appliquant la formule de Huygens :

$$T = \frac{1}{2} M \cdot (\vec{V}_{C, D/R0})^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{R/R0} \cdot [J] \cdot \vec{\Omega}_{R/R0}$$

$$T = \frac{1}{2} M \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{R/R0} \cdot [J] \cdot \vec{\Omega}_{R/R0}$$

$$\text{avec : } [J] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \text{ avec } I_{yz} = I_y = I_z$$

En développant l'expression précédente, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} \rho \cdot (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{yz} \cdot (\dot{\theta}_y^2 + \dot{\theta}_z^2) + \frac{1}{2} I_x \cdot (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}_y \cdot \dot{\phi} \cdot \theta_z)$$

Les différents termes de l'énergie cinétique représentent :

- pour le premier terme, l'énergie cinétique de translation,
- pour le deuxième terme, l'énergie cinétique de rotation,
- pour le terme $\frac{1}{2} I_x \cdot \dot{\phi}^2$, l'énergie « propre » de rotation,
- et pour le terme $I_x \cdot (\dot{\theta}_y \cdot \dot{\phi} \cdot \theta_z)$, l'effet gyroscopique.

3.2 Calcul des équations d'équilibre

Les équations de Lagrange sont utilisés pour formuler l'équilibre dynamique du disque. Dans ce cas particulier , l'énergie de déformation est nulle (disque infiniment rigide) et aucun effort extérieur n'est considéré, on a donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec} \quad \langle q \rangle = \langle u \ v \ w \ \theta_y \ \theta_z \rangle : \text{vecteur des degrés de liberté de l'élément disque.}$$

On ne tient pas compte du degré de liberté ϕ car on considère que la vitesse de rotation propre est imposée et donc connue. On obtient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = M \cdot \ddot{u} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v} = M \cdot \ddot{v} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} = M \cdot \ddot{w} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_y} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_y} = I_{yz} \cdot \ddot{\theta}_y + I_x \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta}_z + I_x \cdot \ddot{\phi} \cdot \theta_z \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_z} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_z} = I_{yz} \cdot \ddot{\theta}_z - I_x \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta}_y \end{cases}$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$[M] \langle \ddot{q} \rangle + [C_{gyro}] \langle \dot{q} \rangle + ([K] + [K_{gyro}]) \langle q \rangle = \langle 0 \rangle$$

La matrice d'amortissement gyroscopique du disque s'obtient à partir du moment d'inertie I_x . Elle est antisymétrique, et sa contribution doit être multipliée par la vitesse angulaire propre $\dot{\phi}$.

$$[C_{gyro}] = \dot{\phi} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & I_x \\ 0 & 0 & 0 & - & -I_x & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\langle u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \rangle$ vecteur des degrés de libertés de l'élément disque et tel que : $\dot{\theta}_x = \dot{\phi}$

Le tiret correspond au degré de liberté de rotation suivant l'axe de la poutre et conduit bien évidemment à des termes nuls.

La matrice de raideur gyroscopique du disque s'obtient aussi à partir du moment d'inertie I_x . Sa contribution doit être multipliée par l'accélération angulaire propre $\ddot{\phi}$.

$$[K_{gyro}] = \ddot{\phi} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & I_x \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Description des versions

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
9.4	E. BOYERE, X. RAUD EDF/R&D AMA	Texte initial
9.8	M. Torkhani EDF/R&D AMA	Correction de coquilles