

## HSNV100 - Thermoplasticité en traction simple

---

### Résumé :

Ce test traite la thermo-plasticité de Von Mises avec écrouissage isotrope sur un problème tridimensionnel (modélisation *A* en axisymétrique) et bidimensionnel (modélisation *B* en contraintes planes). L'intérêt du test tient à la dépendance de la limite d'élasticité avec la température. Il permet également de tester l'orthotropie en thermo-élasticité car il s'applique à un matériau isotrope puis à un matériau isotrope déclaré orthotrope. On y teste aussi le calcul de l'énergie de déformation.

Deux modélisations ( *C* avec élément TUYAU, *D* avec élément TUYAU\_6M) sont ajoutées pour tester la thermoplasticité dans ces éléments.

La modélisation *E* permet de tester la bonne prise en compte de la variation des coefficients du comportement VMIS\_CINE\_LINE avec la température (axisymétrique).

La modélisation *F* permet de tester le calcul de l'énergie de déformation thermoélastique dans les poutres (modélisation POU\_D\_T).

La modélisation *G* permet de tester les mêmes fonctionnalités que les modélisations *A* et *B*, mais avec une modélisation 3D.

Les modélisations *H* et *I* permettent de tester, en modélisation 3D et en contraintes planes, un chargement initial en champ de déformations anélastiques. Celui-ci est équivalent à une déformation thermique.

La modélisation *J* est issue de la modélisation *G*, et permet de valider les fonctionnalités de SIMU\_POINT\_MAT en thermo-plasticité.

La modélisation *K* est issue de la modélisation *A*, et permet de valider l'option AFFE\_CHAR\_TEMP\_R de la modélisation AXIS\_INCO. Même chose pour les modélisations *L* et *M* mais pour 3D\_INCO.

La modélisation *N* est issue de la modélisation *A*, et permet de valider l'option AFFE\_CHAR\_TEMP\_R de la modélisation AXIS\_INCO\_UP. Même chose pour les modélisations *O* et *P* mais pour 3D\_INCO\_UP.

La modélisation *Q* est issue de la modélisation *A*, et permet de valider l'option AFFE\_CHAR\_TEMP\_R de la modélisation AXIS\_INCO\_GD. Même chose pour les modélisations *R* et *S* mais pour 3D\_INCO\_GD.

La modélisation  $T$  est issue de la modélisation  $A$ , et permet de valider l'option `AFPE_CHAR_TEMP_R` de la modélisation `AXIS_INCO_GD`. Même chose pour les modélisations  $U$  et  $V$  mais pour `3D_INCO_LOG`.

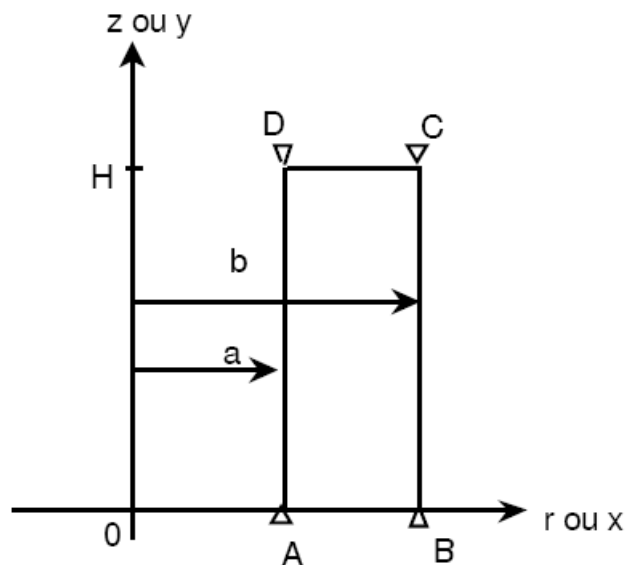
La modélisation  $W$  est issue de la modélisation  $A$ , et permet de valider l'option `AFPE_CHAR_TEMP_R` de la modélisation `AXIS_INCO_LUP`. Même chose pour les modélisations  $X$  et  $Y$  mais pour `3D_INCO_LUP`.

La solution est analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Cylindre axisymétrique (modélisations *A* et *E*) ou plaque rectangulaire (modélisation *B*) ou tuyau droit (modélisations *C* et *D*), ou poutre (modélisation *F*), ou parallélépipède 3D (modélisations *G*, *H* et *J*).



Géométrie du cylindre (*mm*) :

- $a=1$
- $b=2$
- $H=4$

### 1.2 Propriété des matériaux

Pour toutes les modélisations :

Module d'Young :  $E=200000 \text{ MPa}$

Module tangent :  $E_t=50000 \text{ MPa}$

Coefficient de Poisson :  $\nu=0.3$

$\sigma_0=400 \text{ MPa}$

$s=1.0 \text{ E}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Coefficient de dilatation thermique :  $\alpha=1.0 \text{ E}^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Chaleur volumique :  $C^p=0 \text{ J.mm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Conductivité thermique :  $\lambda=1.0 \text{ E}^{-3} \text{ W.mm}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Pour le matériau isotrope déclaré orthotrope, il vient :

$$E_L = E_T = E_N = E$$

$$\nu_{LT} = \nu_{LN} = \nu_{TN} = \nu$$

$$G_{LT} = G_{LN} = G_{TN} = 75000 \text{ MPa}$$

$$\alpha_L = \alpha_T = \alpha_N = \alpha$$

Pour les modélisations de  $A$  à  $G$  :

$$\sigma_y(T) = \sigma_0 (1 - s \cdot (T - T_0))$$

Pour les modélisation  $H$  et  $I$  :

$$\sigma_y(T) = \sigma_0 \quad (s=0)$$

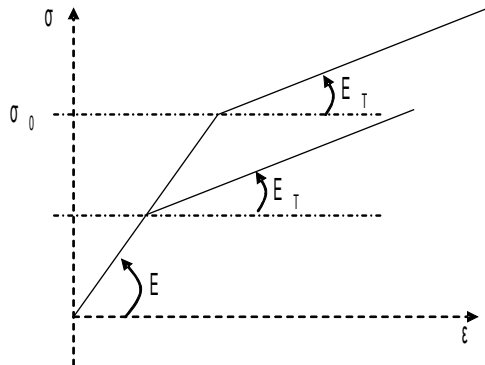


Figure : Courbe de traction du matériau

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Modélisations  $A$ ,  $E$  et  $K$  :  $uz=0$  sur les côtés  $AB$  et  $CD$  (Axe  $Oz$  fixe)
- Modélisations  $B$  et  $I$  :  $uy=0$  sur les côtés  $AB$  et  $CD$ ,  $ux=0$  en  $A$
- Modélisations  $C$ ,  $D$  et  $F$  : encastrement en  $A$ ,  $Uy=0$  en  $C$
- Modélisations  $G$ ,  $H$ ,  $L$  et  $M$  :  $uy=0$  sur les côtés  $AB$  et  $CD$ ,  $ux=uz=0$  (nœud  $N3$ ),  $uz=0$  (nœud  $N4$ )
- $T(t) = \gamma t + T0$  avec :  $\gamma = 1^\circ C/s$  et  $T0 = 0^\circ C$ .
- Modélisations  $H$  et  $I$  : Champs de déformations initiales :  $\varepsilon = \alpha(T - T_0) Id$
- Modélisation  $J$  : Champ de déformations imposées :  $\varepsilon_{yy} = 0$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Solution analytique a été déterminée par F. Voldoire (EDF R&D / AMA) :

#### Cas axisymétrique ( 2D )

Champs de déplacement  $u = U_r(r) e_r$  (blocage en  $z$ )

$$\text{Champs de déformation : } \varepsilon(u) = \begin{pmatrix} u_r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \text{ selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Champs de contraintes : } \sigma(u) = \sigma_l \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (cf. conditions aux limites) selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix}$$

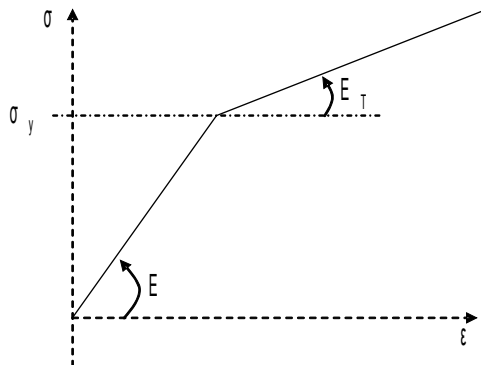
#### Cas parallélépipédique

Champs de déplacement  $u = U_x(x) e_x + U_y(y) e_y$  (blocage en  $z$ )

$$\text{Champs de déformation : } \varepsilon(u) = \begin{pmatrix} u_x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_y' \end{pmatrix} \text{ selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Champs de contraintes : } \sigma(u) = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (cf. conditions aux limites) selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Le cas pourra être étudié en contraintes planes et en 3D .



$$2\nu = \frac{E}{(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{(1-2\nu)}$$

La loi de comportement s'écrit (variable interne scalaire  $p$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{9K} \text{tr} \sigma Id + \frac{1}{2\mu} \sigma^D + \varepsilon^P + \alpha(T - T^0) Id \\ \text{avec : } \sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) Id \quad (\text{déviateur des contraintes}) \\ \dot{\sigma}^P = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} \text{ et } \|\sigma_{\dot{e}q}\| = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D} \\ \dot{p} = 0 \quad \text{si } f(\sigma, p) = \|\sigma_{\dot{e}q}\| - R(p) < 0 \\ \dot{p} \geq 0 \quad \text{si } f(\sigma, p) = 0 \end{array} \right.$$

$R(p)$  désigne la fonction d'érouissage :  $R(p) = \sigma_y + \frac{EE_T}{E - E_T} p$

Le taux  $\dot{p}$  peut être exprimé, lorsque  $f(\sigma, p) = 0$ . En effet, de  $\dot{p} f$  identiquement nul, on tire :  $\dot{p} \dot{f} + \dot{p} f = 0$

Ainsi, quand on est sur le critère, nécessairement  $\dot{f} = 0$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} - \frac{\partial R}{\partial T} \cdot \dot{T} - \frac{\partial R}{\partial p} \dot{p} &= 0 \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \cdot \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} + \sigma_y^o \cdot s \cdot \dot{T} - \frac{EE_T}{E - E_T} \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{EE_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} + \sigma_y^o \cdot s \cdot \dot{T} \right) \quad \text{si } \dot{p} \geq 0, \text{ pour } \|\sigma_{\dot{e}q}\| = R(p)$$

Le champ de contraintes étant uniaxial, on a :

$$\sigma^D = \frac{\sigma_L}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\|\sigma_{\dot{e}q}\| = |\sigma_L|$$

et :

$$\dot{\varepsilon}^P = \frac{\dot{p}}{2} \cdot \text{sgn}(\sigma_L) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation de comportement conduit à :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{-\nu}{E} \dot{\sigma}_L - \frac{\dot{p}}{2} \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T} \quad (= \dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yy} \text{ pour le cas du parallélépipède}) \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{-\nu}{E} \dot{\sigma}_L - \frac{\dot{p}}{2} \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{-3}{2} \alpha \dot{T} + \frac{1-2\nu}{2E} \dot{\sigma}_L \\ \dot{p} = \operatorname{sgn}(\sigma_L) \left( -\alpha \dot{T} - \frac{\dot{\sigma}_L}{E} \right) = 0 \quad \text{si } |\sigma_L| < R(p) \\ \dot{p} = \operatorname{Max} \left[ 0, \frac{E-E_T}{EE_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} + \sigma_y^o \cdot s \cdot \dot{T} \right) \right] \quad \text{sinon} \end{cases}$$

C'est-à-dire, dans le cas  $|\sigma_L| = R(p)$  (critère atteint) :

$$\dot{p} = \max \left[ 0, \frac{E-E_T}{EE_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} + \sigma_y^o \cdot s \cdot \dot{T} \right) \right]$$

## 2.1.1 Phase élastique

Au début du chargement thermique,  $|\sigma_L|$  étant inférieur à  $\sigma_y$ ,  $\dot{p}$  est nul.

D'où :  $\dot{\sigma}_L = -E \alpha \dot{T}$  ;  $\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \alpha \dot{T} (1 + \nu)$

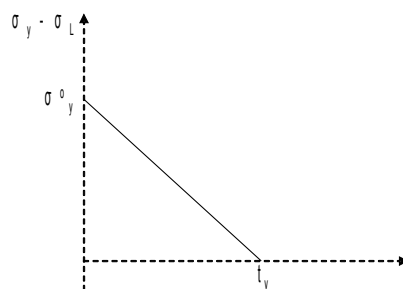
Ainsi : 
$$\begin{cases} \sigma_L = -E \alpha \theta t \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha \theta (1 + \nu) t \end{cases} \quad (\text{compression } \sigma_L < 0)$$

Ceci correspond à la solution de référence pour le test de l'élasticité orthotrope

### Validité de la solution élastique

Le critère est :  $|\sigma_L(t)| - \sigma_y(t) = E \theta t - \sigma_y^o (1 - s \theta t) \leq 0$

Le critère n'est pas franchi pour  $t \in [0, t_y]$ , avec :  $t_y = \frac{\sigma_y^o}{\theta (E \alpha + \sigma_y^o s)}$



$$\text{A l'instant } t_y : \sigma_L(t_y) = \frac{-E \alpha \sigma_y^o}{E \alpha + \sigma_y^o s}$$

$$\text{La densité d'énergie de déformation vaut : } w(t_y) = \frac{-1}{2} E (\alpha \theta)^2$$

$$\text{Dans le cas parallélépipédique on a : } w(t_y) = \frac{-1}{2} E (\alpha \theta)^2 (x_B - x_A) H$$

$$\text{Dans le cas axisymétrique on a : } w(t_y) = \frac{-1}{2} E (\alpha \theta)^2 \cdot \frac{(r_B^2 - r_A^2)}{2} H \quad (\text{pour 1 radian})$$

## 2.1.2 Phase élastoplastique

$t \geq t_y$  . On est sur le critère. Alors :

$$\dot{p} = \max \left[ 0, \frac{E - E_T}{EE_T} (\dot{\sigma}_L \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \sigma_y^o \cdot s \cdot \dot{T}) \right]$$

En admettant que l'on soit "en charge"  $\dot{p} \geq 0$  , alors on élimine  $\dot{p}$  pour avoir :

$$\dot{\sigma}_L = -E_T \cdot \dot{T} (\alpha + \operatorname{sgn}(\sigma_L) \cdot \frac{E - E_T}{EE_T} \sigma_y^o \cdot s)$$

puis :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{E} \dot{T} (-\alpha \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \frac{\sigma_y^o \cdot s}{E})$$

$t = t_y$ ,  $\sigma_L = -E \alpha \theta t_y < 0$  ; on intègre alors ces expressions pour  $t \geq t_y$  ( $\dot{T} = \theta$ ) :

$$\begin{cases} \sigma_L(t) = -E_T \cdot \theta (t - t_y) \left[ \alpha - \frac{E - E_T}{EE_T} s \sigma_y^o \right] - \sigma_L(t - y) \\ p(t) = \frac{\sigma_y^o (E - E_T)}{E^2} \left( \frac{t}{t_y} - 1 \right) \end{cases}$$

Soit, après réarrangement,  $t \geq t_y$  :

$$\begin{cases} \sigma_L(t) = \sigma_y^o (s \theta t - 1 + \frac{E_T}{E} (1 - \frac{t}{t_y})) \\ p(t) = \frac{\sigma_y^o (E - E_T)}{E^2} \left( \frac{t}{t_y} - 1 \right) \end{cases}$$

### Validité de cette solution élastoplastique

Il faut s'assurer que  $\sigma_L(t)$  reste négatif. Sachant que  $s \theta t < 1$  , et que  $t > t_y$  , le résultat précédent confirme que  $\sigma_L(t) < 0$  . Enfin, on remarque que :

$$\operatorname{sgn}(\sigma_L) \frac{1 - 2\nu}{2} \dot{p} + \varepsilon_{rr} = \alpha (1 + \nu) \dot{T}$$

d'où, puisque  $\sigma_L(t) < 0$  :



$$\varepsilon_{rr}(t) = \varepsilon_{\theta\theta}(t) = \alpha\theta(1+\nu)t + \frac{1-2\nu}{2} p(t), \forall t \in [t_y, t_{fm}]$$

## 2.1.3 Cas particulier des modélisations H et I

La déformation thermique est remplacée par une déformation anélastique donnée. Comme  $s=0$ ,

$$\sigma_L = -E\alpha\theta \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \alpha\theta(1+\nu)t$$

La solution reste élastique tant que  $t < t_y = \frac{\sigma_0}{\theta E \alpha} = 200 \text{ s}$

## 2.2 Résultats de référence

$\varepsilon_{rr}$  Ou  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $p$  en  $t_y$  et au-delà :

**Phase élastique** : pour  $t < t_y$  :

$$\begin{aligned} \sigma_L &= -E\alpha\theta t & \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} &= \alpha\theta(1+\nu)t & \text{en axisymétrique} \\ \varepsilon_{xx} &= \alpha\theta(1+\nu)t & & & \text{en contraintes planes} \end{aligned}$$

La limite élastique est atteinte en  $t_y = \frac{\sigma_0}{\theta(E\alpha + \sigma_0 s)} = 66.666 \text{ s}$  d'où  $\sigma_L(t_y) = \frac{\sigma}{(1 + \sigma_0 \frac{s}{E\alpha})}$

**Phase élastoplastique** : pour  $t \geq t_y$

$$\sigma_L(t) = \sigma_0 \left( s\theta t - 1 + \frac{E_t}{E} \left( 1 - \frac{t}{t_y} \right) \right)$$

$$p(t) = \frac{\sigma_0(E - E_T)}{E^2} \left( \frac{t}{t_y} - 1 \right)$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha\theta(1+\nu)t + \frac{1-2\nu}{2} p(t) \quad \text{en axisymétrique}$$

$$\text{ou } \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha\theta(1+\nu)t + \frac{1-2\nu}{2} p(t) \quad \text{en contraintes planes}$$

D'où :

**phase élastique**

$$\left. \begin{aligned} t_y &= 66.666 \text{ s} \\ \sigma_L(t_y) &= -133.333 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{rr}(t_y) = \varepsilon_{\theta\theta}(t_y) &= 0.86666 E^{-3} \end{aligned} \right\} \text{phase élastique}$$

$$W = 4.444 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$$

$$W = 0.17778 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^2 \quad (\text{PLAN ou 3D})$$

$$W = 0.26666 \text{ Mpa} \cdot \text{mm}^3 \cdot \text{rad} - 1 \quad (\text{axi})$$

**Puis phase élastoplastique :**

$$\text{à } t = 80 \text{ s} : \sigma(80) = -100.0 \text{ MPa}$$

$$p(80) = 0.300 E^{-3}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(80) &= \varepsilon_{\theta\theta}(80) = 1.1 E^{-3} \\ \text{à } t=90 \text{ s} : \sigma(90) &= -75.0 \text{ MPa} \\ p(90) &= 0.525 E^{-3} \\ \varepsilon_{rr}(90) &= \varepsilon_{\theta\theta}(90) = 1.275 E^{-3}\end{aligned}$$

## 2.2.1 Cas particulier des modélisations H et I

$$\begin{aligned}\text{À } t=66.67 \text{ s} \quad \sigma_L(66.67) &= -133.33 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{xx}(66.67) &= \varepsilon_{zz}(66.67) = 8.667 E^{-4} \\ \text{À } t=80 \text{ s} \quad \sigma_L(80) &= -160 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{xx}(80) &= \varepsilon_{zz}(80) = 8.667 E^{-4} \\ \text{À } t=90 \text{ s} \quad \sigma_L(90) &= -180 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{xx}(90) &= \varepsilon_{zz}(90) = 8.667 E^{-4}\end{aligned}$$

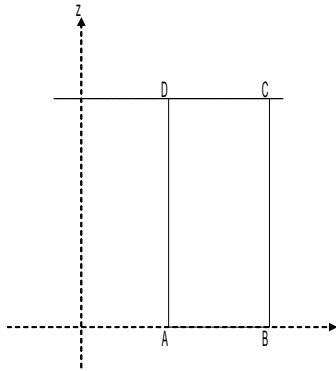
## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD4 - Axisymétrique



### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 1 QUAD4, 4 SEG2

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants (s)	Référence
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}$	$t = 66.666$	$8.6666 \cdot 10^{-4}$
	$t = 80$	$1.1000 \cdot 10^{-3}$
	$t = 90$	$1.2750 \cdot 10^{-3}$
$p$	$t = 66.666$	0
	$t = 80$	$3.0000 \cdot 10^{-4}$
	$t = 90$	$5.2500 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{zz}$ (MPa)	$t = 66.666$	-133.333
	$t = 80$	-100.000
	$t = 90$	-75.000
ENEL_ELGA (J)	$t = 66.666$	$4.444 \cdot 10^{-2}$
ENER_TOTALE (J)	$t = 66.666$	0.2666
ENER_POT (J)	$t = 66.666$	0.2666

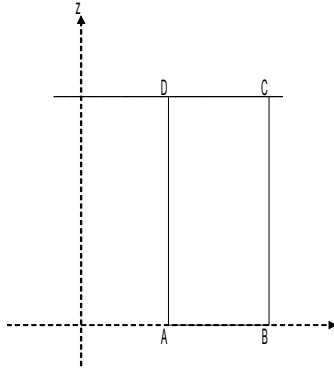
#### Orthotropie (COMP\_ELAS et COMP\_INCR)

Variables	Instants (s)	Référence
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}$	$t = 66.666$	$8.6666 \cdot 10^{-4}$
	$t = 80$	$1.04 \cdot 10^{-3}$
	$t = 90$	$1.17 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{zz}$ (MPa)	$t = 66.666$	-133.333
	$t = 80$	-160.000
	$t = 90$	-180.000

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD4 - Contraintes planes



### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4  
Nombre de mailles et types : 1 QUAD4, 4 SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants ( <i>s</i> )	Référence
<i>EPXX</i>	<i>t</i> = 66.666	8.6666 10 <sup>-4</sup>
	<i>t</i> = 80	1.1000 10 <sup>-3</sup>
	<i>t</i> = 90	1.2750 10 <sup>-3</sup>
<i>p</i>	<i>t</i> = 66.666	0
	<i>t</i> = 80	3.0000 10 <sup>-4</sup>
	<i>t</i> = 90	5.2500 10 <sup>-4</sup>
<i>SIYY</i> (MPa)	<i>t</i> = 66.666	-133.333
	<i>t</i> = 80	-100.
	<i>t</i> = 90	-75.000
ENEL_ELGA ( <i>J</i> )	<i>t</i> = 66.666	4.444. 10 <sup>-2</sup>
ENER_TOTALE ( <i>J</i> )	<i>t</i> = 66.666	0.17777
ENER_POT ( <i>J</i> )	<i>t</i> = 66.666	0.17777

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



1 élément TUYAU

### 5.2 Caractéristiques du maillage

1 élément TUYAU

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants (s)	Référence
$p$	$t=66.666$	0
	$t=80$	$3 \cdot 10^{-4}$
	$t=90$	$5.25 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	$t=66.666$	-1.333
	$t=80$	-100
	$t=90$	-75

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



1 élément TUYAU 6M

### 6.2 Caractéristiques du maillage

1 élément TUYAU

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants ( <i>s</i> )	Référence
<i>p</i>	<i>t</i> = 66.666	0
	<i>t</i> = 80	$3 \cdot 10^{-4}$
	<i>t</i> = 90	$5.25 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	<i>t</i> = 66.666	-1.333
	<i>t</i> = 80	-100
	<i>t</i> = 90	-75

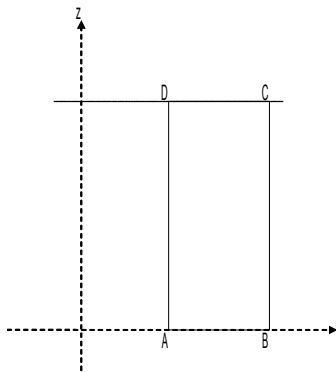
## 7 Modélisation E

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD4 - Axisymétrique.

Test de la variation des coefficients de VMIS\_CINE\_LINE en fonction de la température, dans ce cas  $E_T$  (donné par D\_SIGM\_EPSI) varie comme :  $E_T = 10^5 (1 - 10^{-2}(T - T_0))$ . La constante de Prager

$$\text{vaut : } C = \frac{2}{3} \frac{E E_T}{E - E_T}$$



### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 1 QUAD4, 4 SEG2

### 7.3 Remarque

On teste la variation de  $E_T$  (D\_SIGM\_EPSI) avec la température par comparaison avec le comportement VMIS\_ECMI\_TRAC où  $C$  (constante de Prager) varie avec la température de façon similaire (pas de solution analytique).

### 7.4 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants (s)	Référence ( Aster ) ( VMIS_ECMI_TRAC )
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}$	$t = 66.666$	$8.6666 \cdot 10^{-4}$
	$t = 80$	$1.112 \cdot 10^{-3}$
	$t = 90$	$1.303 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{zz}$ (MPa)	$t = 66.666$	-133.333
	$t = 80$	-88
	$t = 90$	-47

### 7.5 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec le comportement VMIS\_CINE\_LINE qu'avec le comportement VMIS\_ECMI\_TRAC ce qui valide la prise en compte de la température dans ce modèle.

## 8 Modélisation F

---

### 8.1 Caractéristiques de la modélisation



1 élément POU\_D\_T

### 8.2 Caractéristiques du maillage

1 maille SEG2

### 8.3 Grandeurs testées et résultats

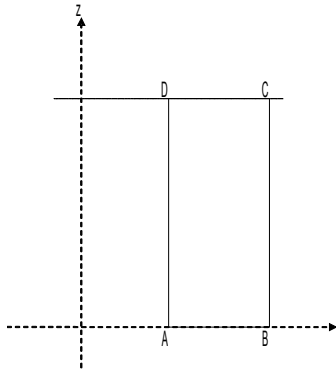
Variables	Instants (s)	Référence
$\sigma_{yy}$	$t=66.666$	-1.333
ENER_POT (J)	$t=66.666$	0.3555



## 9 Modélisation G

### 9.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8  
Nombre de mailles et types : 1 HEXA8

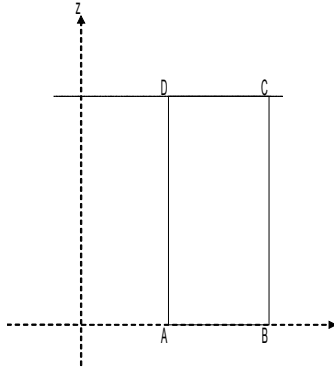
### 9.3 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants ( $s$ )	Référence
$\varepsilon_{xx}$	$t=66.666$	$8.6666 \cdot 10^{-4}$
	$t=80$	$1.1000 \cdot 10^{-3}$
	$t=90$	$1.2750 \cdot 10^{-3}$
$p$	$t=66.666$	0
	$t=80$	$3.0000 \cdot 10^{-4}$
	$t=90$	$5.2500 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	$t=66.666$	-133.333
	$t=80$	-100.
	$t=90$	-75.000
ENEL_ELGA	$t=66.666$	$4.444 \cdot 10^{-2}$
ENER_TOTALE	$t=66.666$	$4.444 \cdot 10^{-2}$
ENER_POT	$t=66.666$	$4.444 \cdot 10^{-2}$

## 10 Modélisation H

### 10.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 HEXA8

### 10.3 Grandeurs testées et résultats

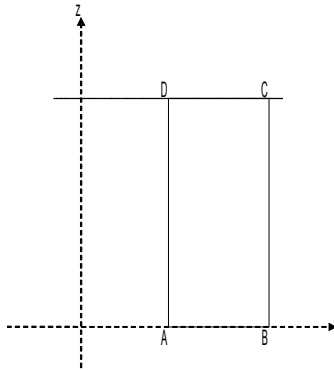
Variables	Instants ( $s$ )	Référence
$\varepsilon_{xx}$	$t=66.666$	$8.9930 \cdot 10^{-4}$
	$t=80$	$1.0980 \cdot 10^{-3}$
	$t=90$	$1.2480 \cdot 10^{-3}$
$p$	$t=66.666$	0
	$t=80$	$2.9400 \cdot 10^{-4}$
	$t=90$	$3.9200 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	$t=66.666$	-100.666
	$t=80$	-101.2
	$t=90$	-101.6
ENEL_ELGA	$t=66.666$	$2.53344 \cdot 10^{-2}$
EPSP_ELGA		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$1.960 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-3.920 \cdot 10^{-4}$
EPSP_ELNO		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$1.960 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-3.920 \cdot 10^{-4}$
EPME_ELGA		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$3.484 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-9.000 \cdot 10^{-4}$
EPME_ELNO		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$3.484 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-9.000 \cdot 10^{-4}$
EPMG_ELGA		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$3.491 \cdot 10^{-4}$

$\xi_{yy}$	$t=90$	$-9.000 \cdot 10^{-4}$
<hr/>		
EPMG_ELNO		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$3.491 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-9.000 \cdot 10^{-4}$
<hr/>		
ENER_TOTALE	$t=66.666$	$4.17215 \cdot 10^{-2}$

## 11 Modélisation I

### 11.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD4 - Contraintes planes



Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 1 QUAD4, 4 SEG2

### 11.2 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants (s)	Référence
$p$	$t=66.666$	0
	$t=80$	$2.940 \cdot 10^{-4}$
	$t=90$	$3.9200 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	$t=66.666$	-100.666
	$t=80$	-101.2
	$t=90$	-101.6
ENEL_ELGA	$t=66.666$	$2.53344 \cdot 10^{-2}$
EPSP_ELGA		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$1.960 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-3.920 \cdot 10^{-4}$
EPSP_ELNO		
$\varepsilon_{xx}$	$t=90$	$1.959 \cdot 10^{-4}$
$\xi_{yy}$	$t=90$	$-3.9199 \cdot 10^{-4}$
INDIC_ENER	$t=90$	0.00
INDIC_SEUIL	$t=90$	0.00

## 12 Modélisation J

---

### 12.1 Caractéristiques de la modélisation

Pas de maillage : point matériel (SIMU\_POINT\_MAT)

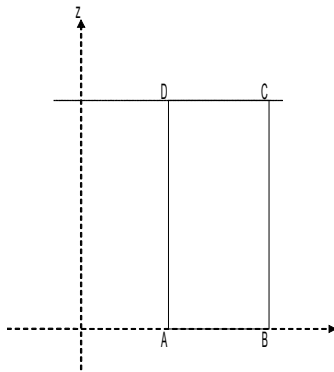
### 12.2 Grandeurs testées et résultats

Variables	Instants ( <i>s</i> )	Référence
$\varepsilon_{xx}$	$t = 66.666$	$8.6666 \cdot 10^{-4}$
	$t = 80$	$1.1000 \cdot 10^{-3}$
	$t = 90$	$1.2750 \cdot 10^{-3}$
$p$	$t = 66.666$	0
	$t = 80$	$3.0000 \cdot 10^{-4}$
	$t = 90$	$5.2500 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{yy}$ (MPa)	$t = 66.666$	-133.333
	$t = 80$	-100.
	$t = 90$	-75.000

## 13 Modélisation K

### 13.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD8 - Axisymétrique



### 13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8, 4 SEG3

### 13.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\sigma_{zz}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{zz}(t=80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.3%
$\sigma_{zz}(t=90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

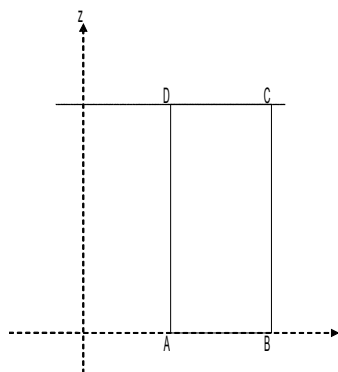
### 13.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation AXIS\_INCO qu'avec la formulation AXIS classique.

## 14 Modélisation L

### 14.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 14.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 14.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

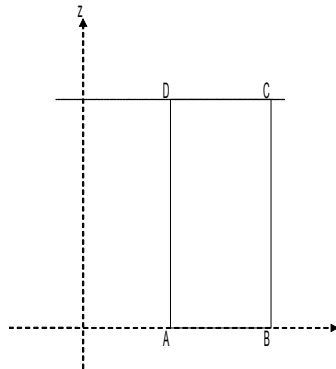
### 14.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO qu'avec la formulation 3D classique.

## 15 Modélisation M

### 15.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 15.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 35  
Nombre de mailles et types : 12 TETRA10

### 15.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

### 15.4 Remarque

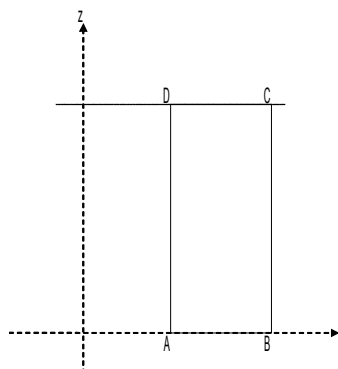
On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO qu'avec la formulation 3D classique.



## 16 Modélisation N

### 16.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD8 - Axisymétrique



### 16.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8, 4 SEG3

### 16.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.3%
$\sigma_{zz}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{zz}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.1%
$\sigma_{zz}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

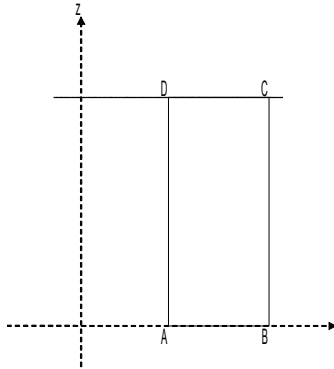
### 16.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation AXIS\_INCO\_UP qu'avec la formulation AXIS classique.

## 17 Modélisation O

### 17.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 17.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20  
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 17.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

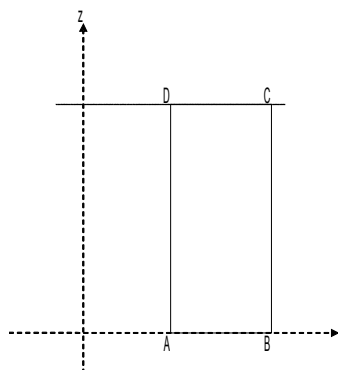
### 17.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_UP qu'avec la formulation 3D classique.

## 18 Modélisation P

### 18.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 18.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 35

Nombre de mailles et types : 12 TETRA10

### 18.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.1%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.1%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.1%

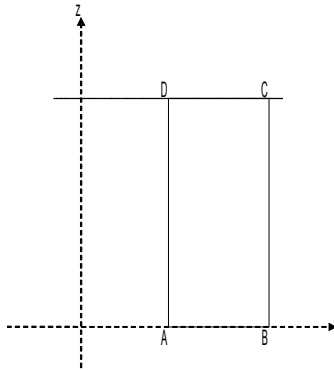
### 18.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_UP qu'avec la formulation 3D classique.

## 19 Modélisation Q

### 19.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD8 - Axisymétrique



### 19.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8, 4 SEG3

### 19.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.15%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.4%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.5%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.4%
$\sigma_{zz}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{zz}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.525%
$\sigma_{zz}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.5%

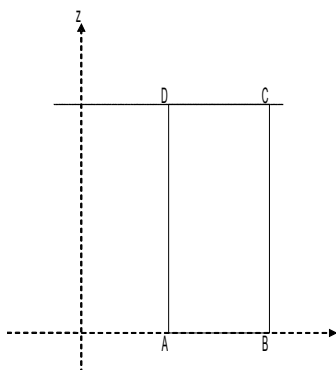
### 19.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation AXIS\_INCO\_GD qu'avec la formulation AXIS classique.

## 20 Modélisation R

### 20.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 20.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 20.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.15%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.4%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.11%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.3%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.4%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.1275%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.525%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.5%

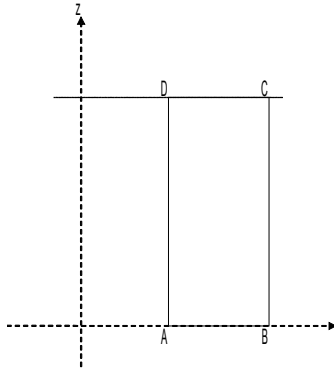
### 20.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_GD qu'avec la formulation 3D classique.

## 21 Modélisation S

### 21.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 21.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 35  
Nombre de mailles et types : 12 TETRA10

### 21.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.1%
$\varepsilon_{xx}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.15%
$\varepsilon_{xx}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.4%
$p(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.5%
$p(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.35%
$\sigma_{yy}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{yy}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.525%
$\sigma_{yy}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.5%

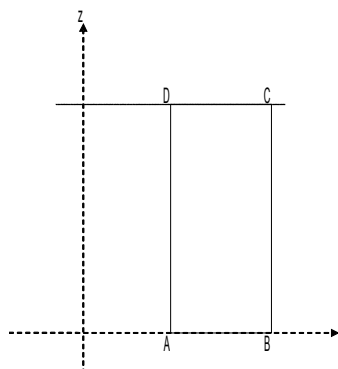
### 21.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_GD qu'avec la formulation 3D classique.

## 22 Modélisation T

### 22.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD8 - Axisymétrique



### 22.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8, 4 SEG3

### 22.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}\%$
$p(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}\%$
$\sigma_{zz}(t=66,666 s)$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{zz}(t=80s)$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.25%
$\sigma_{zz}(t=90s)$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.3%

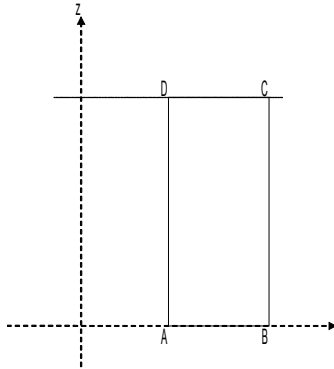
### 22.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation `AXIS_INCO_LOG` qu'avec la formulation `AXIS` classique.

## 23 Modélisation U

### 23.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 23.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20  
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 23.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.06%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.11%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.01%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$-133.333\text{ MPa}$	0.2%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$-100\text{ MPa}$	0.25%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$-75\text{ MPa}$	0.3%

### 23.4 Remarque

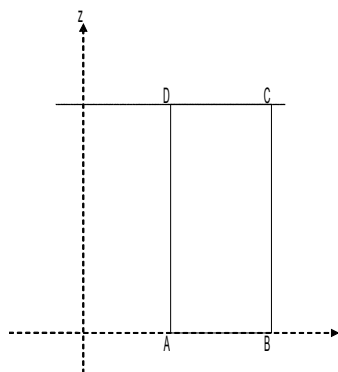
On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_LOG qu'avec la formulation 3D classique.



## 24 Modélisation V

### 24.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 24.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 35

Nombre de mailles et types : 12 TETRA10

### 24.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.06%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.005%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.001%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.25%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.3%

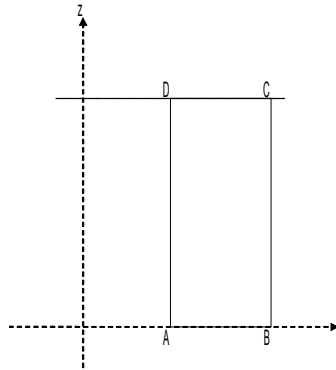
### 24.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_LOG qu'avec la formulation 3D classique.

## 25 Modélisation W

### 25.1 Caractéristiques de la modélisation

QUAD8 - Axisymétrique



### 25.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8

Nombre de mailles et types : 1 QUAD8, 4 SEG3

### 25.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t = 66,666 \text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t = 80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta}(t = 90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t = 66,666 \text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t = 80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}\%$
$p(t = 90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}\%$
$\sigma_{zz}(t = 66,666 \text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$-133.333 \text{ MPa}$	0.2%
$\sigma_{zz}(t = 80\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$-100 \text{ MPa}$	0.25%
$\sigma_{zz}(t = 90\text{s})$	'ANALYTIQUE'	$-75 \text{ MPa}$	0.3%

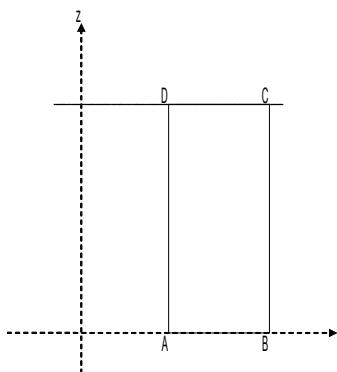
### 25.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation AXIS\_INCO\_LUP qu'avec la formulation AXIS classique.

## 26 Modélisation X

### 26.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 26.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles et types : 1 HEXA20

### 26.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.06%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.11%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.01%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.25%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.3%

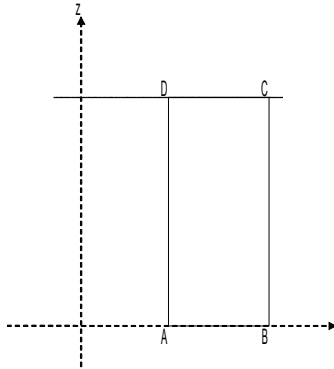
### 26.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_LUP qu'avec la formulation 3D classique.

## 27 Modélisation Y

### 27.1 Caractéristiques de la modélisation

3D,  $H=1$



### 27.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 35  
Nombre de mailles et types : 12 TETRA10

### 27.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\varepsilon_{xx}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$8.6666 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$\varepsilon_{xx}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.06%
$\varepsilon_{xx}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$1.275 \cdot 10^{-3}$	0.1%
$p(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	0	0.2%
$p(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$3 \cdot 10^{-4}$	0.005%
$p(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	$5.25 \cdot 10^{-4}$	0.001%
$\sigma_{yy}(t=66,666\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-133.333 MPa	0.2%
$\sigma_{yy}(t=80\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-100 MPa	0.25%
$\sigma_{yy}(t=90\text{ s})$	'ANALYTIQUE'	-75 MPa	0.3%

### 27.4 Remarque

On obtient bien les mêmes résultats avec la formulation 3D\_INCO\_LUP qu'avec la formulation 3D classique.

## 28 Synthèse des résultats

---

Les résultats sont satisfaisants et valident les comportements thermoélastique et thermoplastique de Von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique linéaire. Les éléments finis utilisés sont les éléments 2D (quadrilatères en contraintes planes ou axisymétrique), 3D, les éléments incompressibles (3D\_INCO, 3D\_INCO\_GD, 3D\_INCO\_UP, AXIS\_INCO, AXIS\_INCO\_UP et AXIS\_INCO\_GD) et les éléments TUYAU.

On constate en particulier une bonne modélisation de la variation de la limite d'élasticité et de la constante de Prager avec la température.

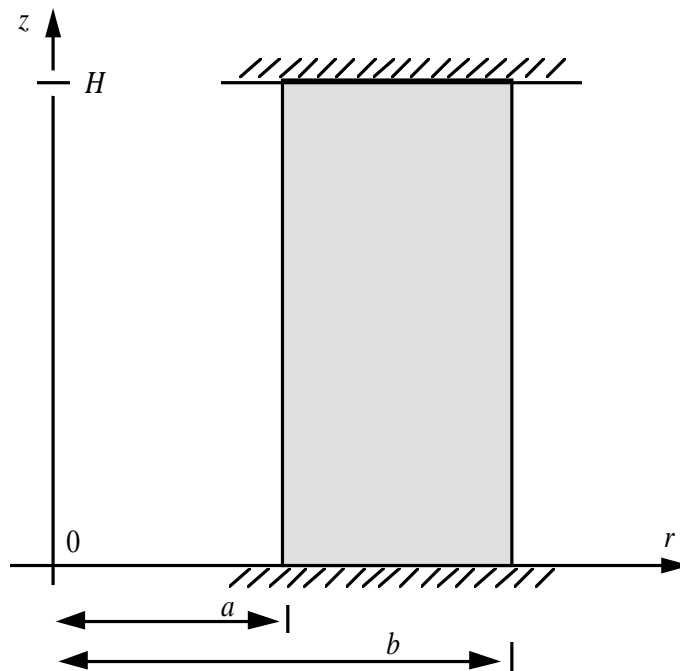
## 29 Annexe

### 29.1 Présentation

Le problème étudié est tel que la solution soit uniforme en espace, sans aucun effort extérieur donné, de manière à ne tester que le traitement de la relation de comportement.

On considère ainsi le solide suivant :

- hauteur  $H$ ,
- axisymétrique (de rayons  $a$  et  $b$ ),
- ou parallélépipédique (épaisseur  $b-a$ ).



Il est placé entre deux plateaux rigides lubrifiés.

Le matériau est thermoélastoplastique homogène (voir ci-après) à écoulement isotrope et critère de Von Mises.

On suppose la température uniforme en espace, et croissante.

## 29.2 Cinématique, équilibre

### 29.2.1 Cas axisymétrique (2D)

Champs de déplacement :  $u = u_r(r) e_r$  (blocage en  $z$ )

$$\text{champs de déformation : } \varepsilon(u) = \begin{pmatrix} u_r' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r} \end{pmatrix} \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{champs de déformation : } \sigma(u) = \sigma_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cf. conditions aux limites}) \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} r \\ z \\ \theta \end{pmatrix} \right)$$

### 29.2.2 Cas parallélépipédique

Champs de déplacement :  $u = u_x(x) e_x + u_y(y) e_y$  (blocage en  $z$ )

$$\text{champs de déformation : } \varepsilon(u) = \begin{pmatrix} u_x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_y' \end{pmatrix} \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{champs de déformation : } \sigma(u) = \sigma_L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{cf. conditions aux limites}) \quad \left( \text{selon } \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \right)$$

Le cas pourra être étudié en D\_PLAN et en 3D.

## 29.3 Relation de comportement

Écrouissage isotrope, linéaire (module tangent  $E_T$  constant).

Critère de Von Mises.

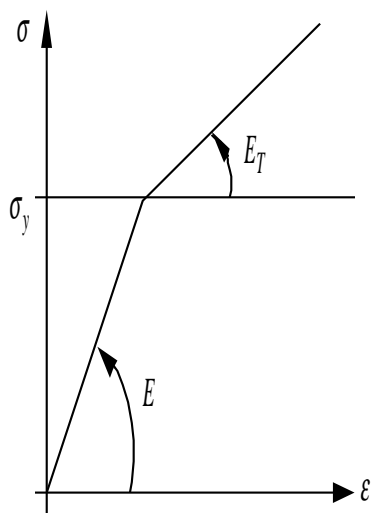
Les coefficients élastiques,  $E$  et  $\nu$ , ainsi que le module tangent  $E_T$  sont invariants suivant la température.

La limite d'élasticité  $\sigma_y$  varie selon la température  $T$  :

$$\sigma_y(T) = \sigma_y^o (1 - s(T - T^o))$$

(pour le domaine de température étudié,  $\sigma_y$  est positif !).

Le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  est constant.



$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

$$3K = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad 3K = \frac{E}{1-2\nu}$$

La loi de comportement s'écrit (variable interne scalaire  $P$ ) :

$$\varepsilon = \frac{1}{9K} \text{tr} \sigma \text{Id} + \frac{1}{2\mu} \sigma^D + \varepsilon^p = \alpha(T - T^o) \text{Id}$$

avec :  $\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \text{Id}$  (déviateur des contraintes)

$$\dot{\sigma}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D}{\|\sigma_{\text{éq}}\|}, \text{ avec } \|\sigma_{\text{éq}}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma^D \sigma^D}$$

$$\dot{p} = 0 \text{ si } f(\sigma, p) = \|\sigma_{\text{éq}}\| - R(p) < 0$$

$$\dot{p} \geq 0 \text{ si } f(\sigma, p) = 0$$



$R(p)$  désigne la fonction d'écroissage :

$$R(p) = \sigma_y + \frac{EE_T}{E - E_T} p$$

Le taux  $\dot{p}$  peut être exprimé, lorsque  $f(\sigma, p) = 0$ . En effet, de  $\dot{p} f$  identiquement nul, on tire :  $\dot{p} \dot{f} + \ddot{p} f = 0$ . Ainsi, quand on est sur le critère  $f = 0$ , nécessairement  $\dot{f} = 0$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} - R_{,T} \dot{T} - R_{,p} \dot{p} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} - \sigma_y^o s \dot{T} - \frac{EE_T}{E - E_T} \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{EE_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \dot{\sigma}^D}{\|\sigma_{\dot{e}q}\|} + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \text{ si } \dot{p} \geq 0, \text{ pour } \|\sigma_{\dot{e}q}\| = R(p)$$

(critère atteint, en « charge »)

## 29.4 Chargement thermique

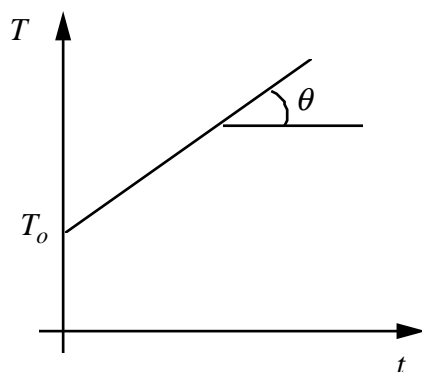
Température uniforme en espace

$$T(t) = \theta t + T_o, \quad \theta > 0$$

$$t \in [0, t_{fin}] ; \text{ avec } t_{fin} < \frac{1}{s \theta}$$

$$T(t) = \theta t + T_o, \quad \theta > 0$$

$$t \in [0, t_{fin}] \text{ avec } t_{fin} < \frac{1}{s \theta}$$



État initial vierge :  $\sigma_L = 0$   
 $p = 0$

## 29.5 Solution

Le champ de contraintes étant uni-axial, on a :

$$\sigma^D = \frac{\sigma_L}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\|\sigma_{\text{éq}}\| = |\sigma_L|$$

et :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{p}}{2} \operatorname{sgn}(\sigma_L) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation de comportement conduit à

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{-\nu}{E} \dot{\sigma}_L - \frac{\dot{p}}{2} \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T} \quad (\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yy} \text{ pour le cas du parallélépipède})$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = 0 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_L + \dot{p} \operatorname{sgn}(\sigma_L) + \alpha \dot{T}$$

D'où :

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \alpha \dot{T} + \frac{1-2\nu}{2E} \dot{\sigma}_L$$

$$\dot{p} = \operatorname{sgn}(\sigma_L) \left( -\alpha \dot{T} - \frac{\dot{\sigma}_L}{E} \right) = 0 \quad \text{si} \quad |\sigma_L| < R(p)$$

$$\dot{p} = \operatorname{Max} \left[ 0; \frac{E - E_T}{EE_T} \left( \frac{3}{2} \frac{\sigma^D \sigma^D}{\|\sigma_{\text{éq}}\|} + \sigma_y^o s \dot{T} \right) \right] \quad \text{sinon}$$

C'est-à-dire, dans le cas  $|\sigma_L| = R(p)$  (critère atteint)

$$\dot{p} = \operatorname{Max} \left[ 0; \frac{E - E_T}{EE_T} (\operatorname{sgn}(\sigma_L) \dot{\sigma}_L + \sigma_y^o s \dot{T}) \right]$$

## 29.5.1 Phase élastique

Au début du chargement thermique,  $|\sigma_L|$  étant inférieur à  $\sigma_y$ ,  $\dot{p}$  est nul.

D'où :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_L &= -E \alpha \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \alpha \dot{T} (1 + \nu)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= -E \alpha \theta t \quad (\text{compression } \sigma_L < 0) \\ \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} &= \alpha \theta (1 + \nu) t\end{aligned}$$

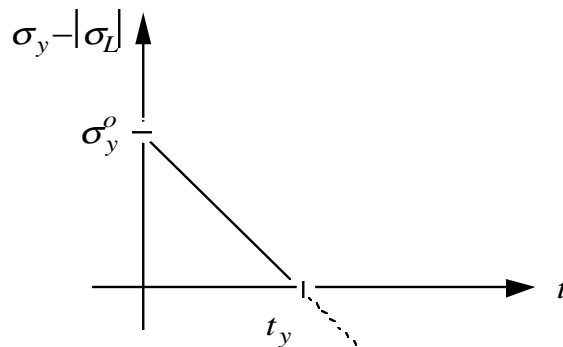
### Validité de la solution élastique

Le critère est :

$$|\sigma_L(t)| - \sigma_y(t) = E \alpha \theta t - \sigma_y^o (1 - s \theta t) \leq 0$$

Le critère n'est pas franchi pour  $t \in [0, t_y]$ , avec :

$$t_y = \frac{\sigma_y^o}{\theta (E \alpha + \sigma_y^o s)}$$



A l'instant  $t_y$  :

$$\sigma_L(t_y) = \frac{-E \alpha \sigma_y^o}{E \alpha + \sigma_y^o s}$$

## 29.5.2 Phase élastoplastique

$t \geq t_y$ . On est sur le critère. Alors :

$$\dot{p} = \text{Max}[0; \frac{E - E_T}{EE_T} (\dot{\sigma}_L \text{sgn}(\sigma_L) + \sigma_y^o s \dot{T})]$$

En admettant que l'on soit "en charge" ( $\dot{p} > 0$ ), alors on élimine  $\dot{p}$  pour avoir

$$\dot{\sigma}_L = -E_T \dot{T} (\alpha + \text{sgn}(\sigma_L) \frac{E - E_T}{EE_T} s \sigma_y^o)$$

puis :

$$\dot{p} = \frac{E - E_T}{E} \dot{T} (-\alpha \text{sgn}(\sigma_L) + \frac{s \sigma_y^o}{E})$$

à  $t = t_y$ ,  $\sigma_L = -E \alpha \theta t_y < 0$  ; on intègre alors ces expressions pour  $t \geq t_y$  ( $\dot{T} = \theta$ ) :

$$\sigma_L(t) = -E_T \theta (t - t_y) [\alpha - \frac{E - E_T}{EE_T} s \sigma_y^o] - \sigma_L(t_y)$$

$$p(t) = \frac{E - E_T}{E^2} \theta [\alpha E + s \sigma_y^o] (t - t_y)$$

Soit, après réarrangement, ( $t > 0 t_y$ ) :

$$\sigma_L(t) = \sigma_y^o (s \theta t - 1 + \frac{E_T}{E} (1 - \frac{t}{t_y}))$$

$$p(t) = \frac{\sigma_y^o (E - E_T)}{E^2} (\frac{t}{t_y} - 1)$$

### Validité de cette solution élastoplastique

Il faut s'assurer que  $\sigma_L(t)$  reste négatif. Sachant que  $s \theta t < 1$ , et que  $t > t_y$ , le résultat précédent confirme que  $\sigma_L(t) < 0$ .

Enfin, on remarque que :

$$\text{sgn}(\sigma_L) \frac{1 - 2\nu}{2} \dot{p} + \dot{\varepsilon}_{rr} = \alpha (1 + \nu) \dot{T}$$

d'où :

$$\varepsilon_{rr}(t) = \varepsilon_{\theta\theta}(t) = \alpha \theta (1 + \nu) t + \frac{1 - 2\nu}{2} p(t), \quad \forall t \in [t_y, t_{fin}]$$

(puisque  $\sigma_L(t) < 0$ ).

## 29.6 Application numérique

$$\begin{aligned} E &= 200000 \text{ MPa}; & \nu &= 0.3; & \alpha &= 10.0 E - 5 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}; & \theta &= 1.0 \text{ s}^{-1} \\ \sigma_y^o &= 400 \text{ MPa}; & T^o &= 0 \text{ } ^\circ\text{C}; & s &= 10.0 E - 2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}; & t_{fin} &< 100 \text{ s} \\ E_T &= 50000 \text{ MPa}; \end{aligned}$$

D'où on obtient en phase élastique :

$$\begin{aligned} t_y &= 66.6666 \text{ s} \\ \sigma_L(t_y) &= -133.333 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{rr}(t_y) = \varepsilon_{\theta\theta}(t_y) &= 0.866666 E - 3 \end{aligned}$$

Puis, phase élastoplastique :

$$\begin{aligned} \text{à } t=80\text{s} : \quad \sigma_L(80) &= -100 \text{ MPa} \\ p(80) &= 0.30 E - 3 \\ \varepsilon_{rr}(80) = \varepsilon_{\theta\theta}(80) &= 1.100 E - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{à } t=90\text{s} : \quad \sigma_L(90) &= -75 \text{ MPa} \\ p(90) &= 0.525 E - 3 \\ \varepsilon_{rr}(90) = \varepsilon_{\theta\theta}(90) &= 1.275 E - 3 \end{aligned}$$