

---

## HSNV121 - Traction en grandes déformations plastiques d'un barreau sous chargement thermique

---

### Résumé :

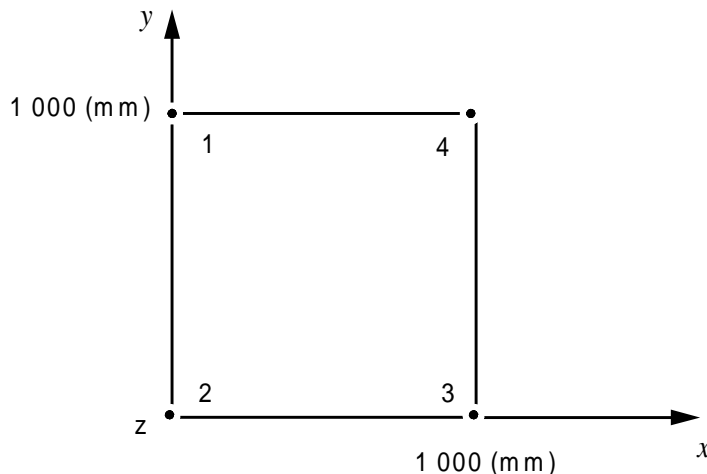
Ce test thermomécanique quasi-statique consiste à chauffer uniformément un barreau de section rectangulaire (3D) ou cylindrique (2D axisymétrique) puis à le soumettre à une traction. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations en plasticité (commande `STAT_NON_LINE`, mot-clé `DEFORMATION: 'SIMO_MIEHE'` ou `'PETIT_REAC'`) pour une relation de comportement en grandes déformations avec écrouissage isotrope linéaire (commande `STAT_NON_LINE`, mot-clé `RELATION: 'VMIS_ISOT_LINE'` et `'VMIS_ISOT_TRAC'`) avec chargement thermomécanique. Avec des modélisations coque ou plaque, les grandes déformations en plasticité sont accessibles grâce au mot-clé `DEFORMATION: 'PETIT_REAC'` pourvu que les rotations restent faibles.

Le barreau est modélisé par un élément volumique (`HEXA20`, modélisation A) ou quadrangulaire (`QUAD4`, pour une modélisation axisymétrique, modélisation B) ou par des éléments de plaque ou de coque (`DKT` pour la modélisation C et `COQUE_3D` pour la modélisation D).

La solution est analytique.

## 1 Problème de référence

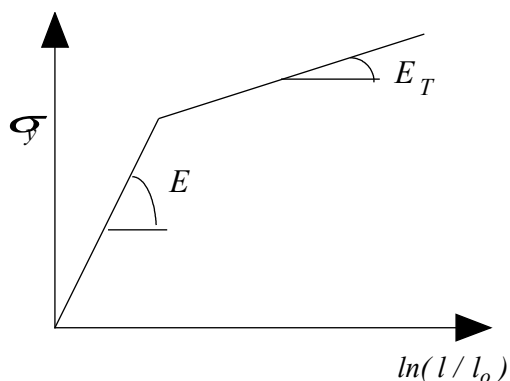
### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés du matériau

Le matériau obéit à une loi de comportement en grandes déformations plastique avec écrouissage isotrope linéaire, dont les caractéristiques dépendent de la température.  
La courbe de traction est donnée dans le plan déformation logarithmique - contrainte rationnelle.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0} \cdot \frac{l}{l_0}$$



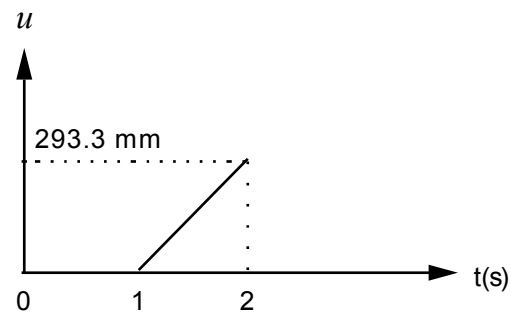
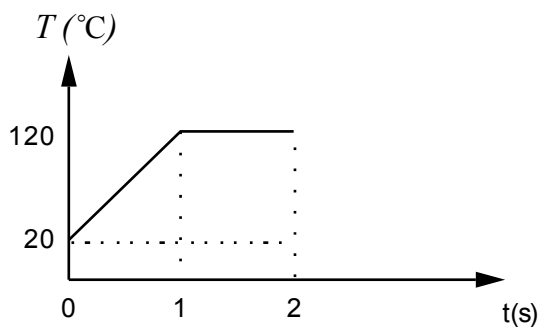
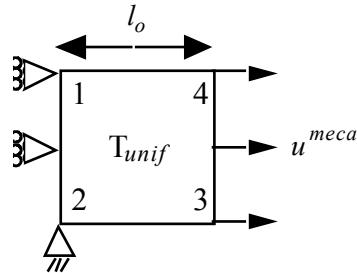
$$\begin{aligned} \nu &= 0.3 \\ \alpha &= 10^{-4} K^{-1} \\ \sigma_y &= 1000 \text{ MPa} \\ \text{à } T &= 20^\circ \text{ C} \\ E &= 250000 \text{ MPa} \\ E_T &= 2500 \text{ MPa} \\ \text{à } T &= 120^\circ \text{ C} \\ E &= 200000 \text{ MPa} \\ E_T &= 2000 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$l_0$  et  $l$  sont, respectivement, la longueur initiale et la longueur actuelle de la partie utile de l'éprouvette.

$S_0$  et  $S$  sont, respectivement, la surface initiale et actuelle. Entre les températures  $20^\circ \text{ C}$  et  $120^\circ \text{ C}$ , les caractéristiques sont interpolées linéairement.

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Le barreau, de longueur initiale  $l_0$ , bloqué dans la direction  $Ox$  sur la face [1,2] est soumis à une température uniforme  $T$  et à un déplacement mécanique de traction  $u^{meca}$  sur la face [3,4]. Les séquences de chargement sont les suivantes :



Température de référence :  $T_{réf} = 20^\circ\text{C}$ .

### Remarque :

Le déplacement mécanique est mesuré à partir de la configuration déformée par le chargement thermique ( $t=1$ s). Pour avoir le déplacement total, il faut donc additionner le déplacement thermique obtenu au temps  $t=1$ s.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Résultat de la solution de référence

Pour un essai de traction suivant la direction  $x$ , le tenseur de Kirchhoff  $\tau$  est de la forme :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les tenseurs gradients de la transformation  $\mathbf{F}$  et  $\bar{\mathbf{F}}$  et le tenseur isochore de déformations plastiques  $\mathbf{G}^p$  sont de la forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & F_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{et } J = \det \mathbf{F} = FF_{yy}^2 \Rightarrow F_{yy} = \sqrt{J/F}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{et } \det \bar{\mathbf{F}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{F} = J^{-1/3} F \\ \bar{F}_{yy} = \bar{F}^{-1/2} \end{cases}$$

$$\mathbf{G}^p = \begin{bmatrix} G^p & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^p & 0 \\ 0 & 0 & G_{yy}^p \end{bmatrix} \quad \text{et } \det \mathbf{G}^p = 1 \Rightarrow G_{yy}^p = (G^p)^{-1/2}$$

Par la loi de comportement, on obtient la relation suivante :

$$\tau = \frac{3K}{2}(J^2 - 1) - \frac{9K\alpha(T - T_{ref})}{2}\left(J + \frac{1}{J}\right)$$

soit

$$J^3 - 3\alpha(T - T_{ref})J^2 - J\left(1 + \frac{2\tau}{3K}\right) - 3\alpha(T - T_{ref}) = 0$$

La contrainte de Cauchy s'écrit :

$$J\sigma = \tau$$

En charge plastique pour un écrouissage isotrope  $R$  linéaire, tel que :

$$R(p) = \frac{EE_T}{E - E_T} p$$

on a :

$$p = \frac{E - E_T}{E E_T} (\tau - \sigma_y)$$

L'intégration de la loi d'écoulement de la déformation plastique  $G^p$  donne (sachant que  $G^p(p=0)=1$ ) :

$$G^p = e^{-2p}$$

La composante  $\bar{F}$  du gradient de la transformation est donnée par la résolution de :

$$\bar{F}^3 - \frac{\tau}{\mu G^p} \bar{F} - \frac{1}{(G^p)^{3/2}} = 0$$

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  (dans la configuration initiale) est de la forme  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{X} + u_y \mathbf{Y} + u_z \mathbf{Z}$ . Les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\tilde{u}}{l_o} X & \text{avec } \tilde{u} &= (F-1) \cdot l_o \\ u_y &= \frac{\tilde{v}}{l_o} Y & \text{avec } \tilde{v} &= \left( \sqrt{\frac{J}{F}} - 1 \right) l_o \\ u_z &= \frac{\tilde{v}}{l_o} Z \end{aligned}$$

## 2.2 Résultats de référence

On adoptera comme résultats de référence les déplacements, la contrainte de Cauchy  $\sigma$  et la déformation plastique cumulée  $p$ .

**Au temps**  $t=2$  s ( $\Delta T=100^\circ\text{C}$ , traction  $u$ )

On cherche le déplacement total (thermique + mécanique) tel que la contrainte  $\tau$  soit égale à :  
 $\tau=1500$  MPa (à  $T=120^\circ\text{C}$ )

$$\begin{aligned} 3K &= 500\,000 \text{ MPa} & \mu &= 76923 \text{ MPa} \\ J &= 1.03 \\ \sigma &= 1453 \text{ MPa} \\ p &= 0,2475 \\ G^p &= 0,609 \\ \bar{F} &= 1,289 \\ F &= 1,303 \\ \tilde{u} &= 303 \text{ mm} \\ \tilde{v} &= -110 \text{ mm} \end{aligned}$$

Avec ces grandeurs, il est possible de déterminer l'énergie élastique du barreau. Attention, la présence de thermique engendre un jacobien élevé, nécessitant une correction spécifique telle que décrite en R5.03.21. Au final, on obtient au point matériel :  $\Psi_{elas} = 5,6$  MPa

## 2.3 Incertitude sur la solution

La solution est analytique. Aux erreurs d'arrondis près, on peut la considérer exacte.

## 2.4 Références bibliographiques

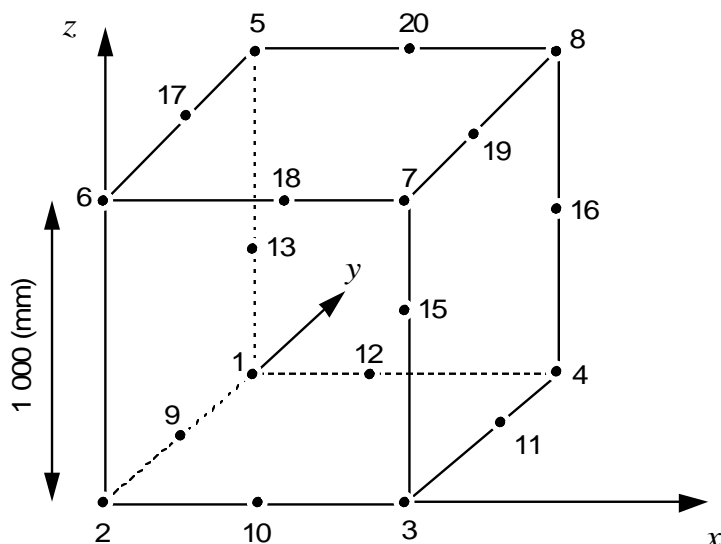
On pourra se référer à :

- 1) V. CANO, E. LORENTZ : Introduction dans le *Code\_Aster* d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastique avec écrouissage isotrope - Note interne EDF DER HI-74/98/006/0

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille HEXA20  
1 maille QUAD8



Conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
 N2 : \quad & U_x = U_y = U_z = 0 & N9, N13, N14, N5, N17 : U_x = 0 \\
 N1 : \quad & U_x = U_z = 0 \\
 N6 : \quad & U_x = U_y = 0
 \end{aligned}$$

**Charge :** Traction sur la face [3 4 8 7 11 16 19 15] + affectation de la même température sur tous les nœuds.

Le nombre total d'incrément est de 21 (1 incrément entre  $t=0s$  et  $1s$ , 20 incrément entre  $t=1s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_RELA est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 20

Nombre de mailles : 2

1 HEXA20

1 QUAD8

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Tolérance
$t=2$ Déplacement $DX$ ( $N8$ )	303	1.00%
$t=2$ Déplacement $DY$ ( $N8$ )	-110	1.00%
$t=2$ Déplacement $DZ$ ( $N8$ )	-110	1.00%
$t=2$ Contraintes $SIGXX$ ( $PGI$ )	1453	1.00%
$t=2$ Variable $P$ $VARI$ ( $PGI$ )	0.2475	1,50%
$t=2$ Variable $INDIPLAS$ ( $PGI$ )	1.	0,10%
)		
$t=2$ ENER_ELAS, TOTALE	5.60E+009	5.00%

Avec *INDIPLAS* l'indicateur de plasticité.

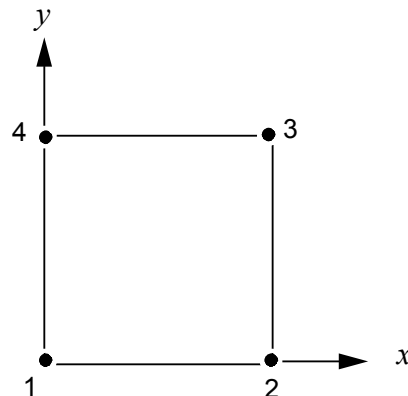
## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation 2D axisymétrique :

1 maille QUAD4

1 maille SEG2



Conditions aux limites :

$$N1 : U_y = 0$$

$$N2 : U_y = 0$$

Chargement :

Traction sur la face [3 4] (maille SEG2) + affectation de la même température sur tous les nœuds

Le nombre total d'incrémentes est de 21 (1 incrément entre  $t=0s$  et  $1s$ , 20 incrémentes entre  $t=1s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_RELA est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles : 2

1 QUAD4

1 SEG2

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

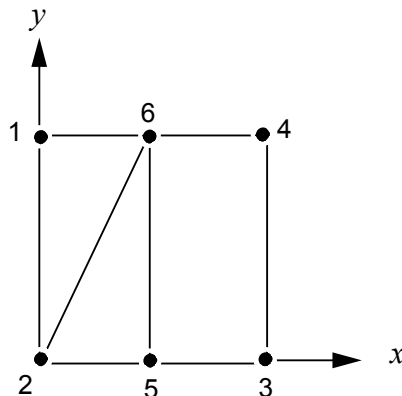
Identification	Référence	Tolérance
$t=2$ Déplacement $DX$ ( $N3$ )	-110	1.00%
$t=2$ Déplacement $DY$ ( $N3$ )	303	1.00%
$t=2$ Contraintes $SIGYY$ ( $PG1$ )	1453	1.00%
$t=2$ Variable $P$ $VARI$ ( $PG1$ )	0.2475	1.00%
$t=2$ ENER_ELAS, TOTALE	5.60E+009	5.00%



## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation plaques DKT d'épaisseur 1000 mm : 1 maille QUAD4, 2 mailles TRIA3  
1 maille SEG2



#### Conditions aux limites :

$$N2 : \quad U_x = 0 \quad U_y = 0 \quad U_z = 0 \quad \theta_x = 0 \quad \theta_y = 0 \quad \theta_z = 0$$

$$N1 : \quad U_x = 0 \quad U_z = 0$$

#### Chargement :

Traction sur la face [3 4] (maille SEG2) + affectation de la même température sur tous les nœuds

Le nombre total d'incrément est de 21 (1 incrément entre  $t=0s$  et  $1s$ , 20 incrément entre  $t=1s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_RELA est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8  
Nombre de mailles : 4

1 QUAD4  
2 TRIA3  
1 SEG2

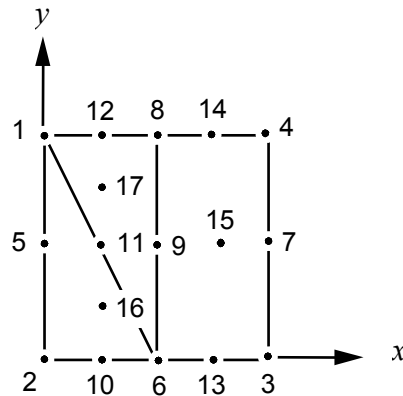
### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Tolérance
$t=2$ Déplacement $DX$ ( $N3$ )	-110	1.50%
$t=2$ Déplacement $DY$ ( $N3$ )	303	1.00%
$t=2$ Effort $NXX$ ( $PGI$ )	1497	1.00%
$t=2$ Effort $NYX$ ( $PGI$ )	0.79	1.00%
$t=2$ Effort $NXY$ ( $PGI$ )	0.61	1.00%
$t=2$ Variable $P$ $VARI$ ( $PGI$ )	0.2475	1.50%

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation COQUE\_3D d'épaisseur 1000 mm 1 maille QUAD9, 2 mailles TRIA7  
: 1 maille SEG3



#### Conditions aux limites :

$$N2 : \quad U_x = 0 \quad U_y = 0 \quad U_z = 0 \quad \theta_x = 0 \quad \theta_y = 0 \quad \theta_z = 0$$

$$N5 : \quad U_x = 0 \quad U_z = 0$$

$$N1 : \quad U_x = 0 \quad U_z = 0$$

#### Chargement :

Traction sur la face [3 4] (maille SEG3) + affectation de la même température sur tous les nœuds

Le nombre total d'incrément est de 21 (1 incrément entre  $t=0s$  et  $1s$ , 20 incrément entre  $t=1s$  et  $2s$ )

La convergence est réalisée si le résidu RESI\_GLOB\_REL est inférieur ou égal à  $10^{-6}$ .

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 17

Nombre de mailles : 4

1 QUAD9

2 TRIA7

1 SEG3

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Tolérance
$t=2$ Déplacement $DX$ ( $N3$ )	-110	1.50%
$t=2$ Déplacement $DY$ ( $N3$ )	303	1.00%
$t=2$ Contrainte $SIXX$ ( $PGI$ )	1453	3.10%
$t=2$ Variable $P$ $VARI$ ( $PGI$ )	0.2475	1.50%

## 7 Synthèse des résultats

---

Les résultats trouvés avec *Code\_Aster* et DEFORMATION: 'SIMO\_MIEHE' sont très satisfaisants avec des pourcentages d'erreur inférieurs à 0.4% sur la contrainte et à 1.2% sur la variable d'écroissage. Pour des éléments de plaque et de coque l'utilisation de DEFORMATION: 'PETIT\_REAC' donne des résultats satisfaisants avec des pourcentages d'erreur de 3% sur l'effort ou la contrainte et inférieurs à 0.7% sur la variable d'écroissage.