
WTNP122 - Modélisation d'un barreau saturé en gaz compressible faiblement non-linéaire (écoulement monophasique) soumis à un choc de pression

Résumé :

Ce cas test a pour objectif de valider :

- les schémas volumes finis développés pour la modélisation des écoulements diphasiques.
- la modélisation hydraulique saturée en éléments finis `D_PLAN_HS`

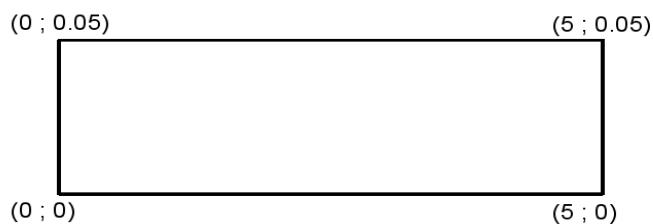
Le problème diphasique va ici être dégénéré en un problème monophasique gaz dont on connaît la solution analytique. Il s'agit de la modélisation monodimensionnelle d'un barreau saturé en gaz soumis à un choc de pression.

1 Problème de référence

L'objectif de ce cas test est de comparer la solution obtenue avec les différents schémas à une solution analytique.

1.1 Géométrie

On considère un barreau 1D de 5m de long. Concrètement le domaine maillé fera $[0m, 5m] \times [0m, 0,05m]$ (dans le cas de la modélisation en triangle, il est important de ne pas avoir de triangles trop « aplatis », le choix de la hauteur du domaine n'est donc pas anodin).



La durée de simulation est de 100s et le nombre de pas de temps est de 100.

1.2 Propriétés des matériaux

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commande contient d'autres données de matériau qui ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

| | | |
|-------------------------|--|-------------|
| Gaz | Masse molaire ($kg \cdot mol^{-1}$) | 0,0001 |
| | Viscosité ($kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$) | 1 |
| | Perméabilité relative (m^2) | 1 |
| Gaz dissous | Coefficient de Henry ($Pa \cdot mol^{-1} \cdot m^3$) | 10000000000 |
| Liquide | Perméabilité relative (m^2) | 1 |
| Paramètres homogénéisés | Perméabilité K_{int} (m^2) | 10^{-7} |
| | Porosité | 1 |
| | Fick gaz ($m^2 \cdot s^{-1}$) | 0 |
| | Fick liquide ($m^2 \cdot s^{-1}$) | 0 |

Tableau 1.2-1 : Propriétés des matériaux

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions limites sont les suivantes :

- des conditions de Neumann à droite du domaine :

$$\frac{\partial(\delta P_g)}{\partial x}(t, x=5, y)=0 Pa$$

- des condition de Dirichlet sur la partie gauche du domaine :

$$P_g(t, x=0, y)=0 Pa$$

1.4 Conditions initiales

La variation de pression initiale de gaz par rapport à la pression de référence est de $\delta P_g(t=0, x, y)=10^4 Pa$.

On a également $P_g^{ref}(t=0, x, y)=10^4 Pa$ ce qui revient à étudier un problème faiblement non linéaire (pour être linéaire on aurait du choisir $P_g^{ref}(t=0, x, y)=10^{10} Pa$) (car on a : $P_g(t=0, x, y)=P_g^{ref} + \delta P_g(t=0, x, y)$).

2 Solution analytique

2.1 Méthode de calcul

Le problème monophasique instationnaire et monodimensionnel peut s'écrire sous une forme générale du type :

$$\begin{aligned} N \frac{\partial P}{\partial t} - K_{int} \Delta P &= 0 \\ P(t=0) &= P_0 \\ P(t, x=0) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x}(t, x, L) &= 0 \end{aligned}$$

Ce problème admet une solution analytique obtenue par développement en séries de Fourier.

$$P = \sum_{k=0}^K \frac{4P_0}{(2k+1)\pi} \exp\left(\frac{-K_{int}}{N} \omega_k^2 t\right) \sin(\omega_k x) \text{ avec } \omega_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}$$

Le nombre de termes K de cette série est déterminé de la façon suivante :

Soit n_x le nombre de points x_i où la solution est évaluée à un instant t .
On pose :

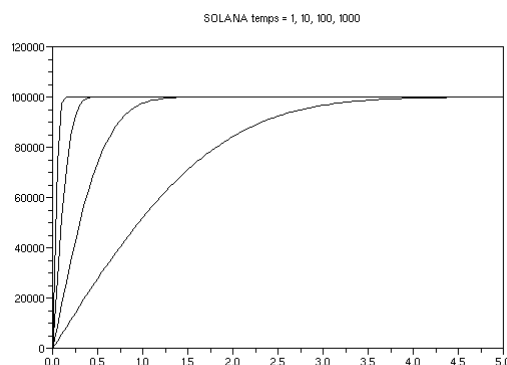
$$a_k^i = \frac{4}{(2k+1)\pi} \exp\left(\frac{-K_{int}}{N} \omega_k^2 t\right) \sin(\omega_k x_i)$$

Si bien que la solution peut s'écrire : $P(x_i) = \sum_{k=0}^K P_0 \cdot a_k^i$

On choisit K tel que : $\frac{1}{n_x} \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} (a_k^i)^2} < \epsilon$

En pratique nous avons pris $\epsilon = 10^{-10}$.

Les allures de la solution analytique aux temps 1, 10, 100, 1000 sont montrées sur la figure ci-dessous :



Le tableau suivant donne le nombre de termes selon le temps :

| Temps | Nombre de termes série |
|-------|---------------------------|
| 1 | 194 |
| 10 | 64 |
| 100 | 22 |
| 1000 | 8 |

Tableau 2.1-1 : Représentation du nombre de terme en fonction du temps

2.2 Hypothèses simplificatrices

On considère que le milieu est complètement saturé en gaz et on impose dans aster une pression de liquide nulle sur tous les nœuds. On impose une pression initiale de gaz P_g^{ref} et on donne des conditions aux limites qui correspondent à une variation de cette pression de référence, Soit alors δP_g cette variation de pression. L'équation de conservation de la masse de gaz s'écrira :

$$\frac{\partial(\varphi \delta P_g)}{\partial t} + \text{div}\left(\frac{K_{int} k_g}{\mu_g} (P_g^{ref} + \delta P_g) \text{div}(P_g^{ref} + \delta P_g)\right) = 0$$

En supposant δP_g petit devant P_g^{ref} , cette équation devient :

$$\frac{\partial(\varphi \delta P_g)}{\partial t} + \frac{K_{int} k_g}{\mu_g} P_g^{ref} \Delta(\delta P_g) = 0$$

C'est donc δP_g que l'on identifiera à la solution de l'équation analytique modèle.

De façon à retrouver les coefficients du problème modèle, on prendra :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \\ k_g &= \mu_g = 1 \end{aligned}$$

et on fera en sorte que

$$K_{int} P_{ref} = 10^{-3}.$$

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation `D_PLAN_HH2SUDM`. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis avec décentrage sur la maille voisine pour les termes de mobilités (les termes fickiens sont moyennés). La loi de couplage hydraulique est `LIQU_AD_GAZ_VAPE`.

3.2 Caractéristiques du maillage

On utilise un maillage constitué de 100 éléments `QUAD9`.

3.3 Grandeurs testées et résultats

On trace les profils de pression de gaz à différents temps ainsi que la solution analytique à ces mêmes instants. Nous sommes ici faiblement non linéaire, il est normal que les courbes soient légèrement éloignées de la solution analytique.

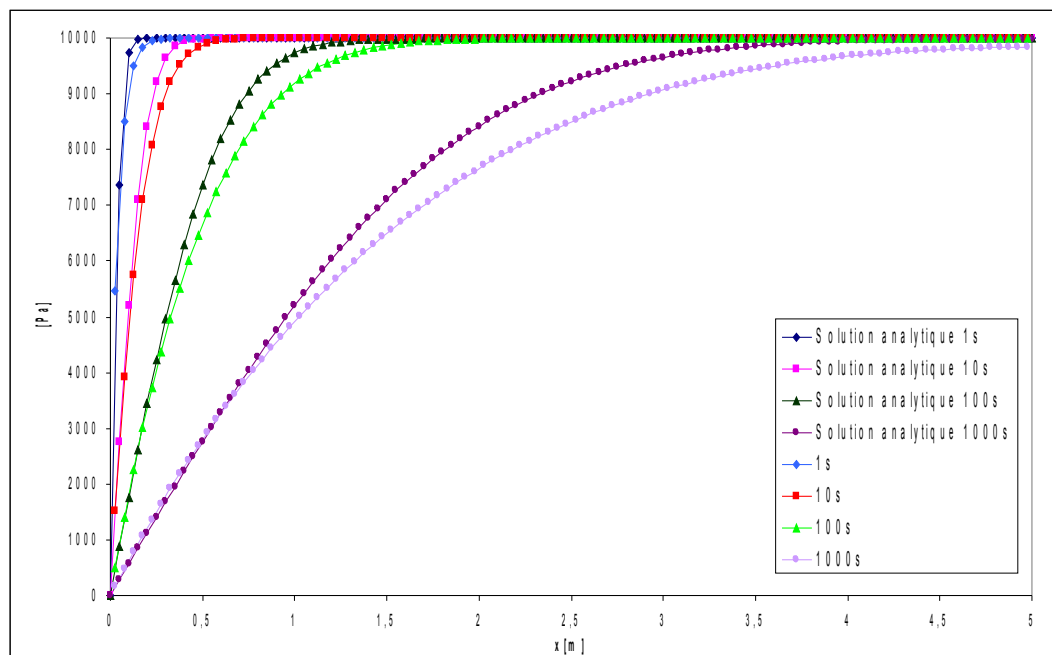


Illustration 1: Profils de pression de gaz

On effectue des tests sur 4 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance |
|----------|----------------------|-----------|----------------|-----------------|-----------|
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | analytique | 1331.0 | 7.0% |
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | non régression | 1412.2251 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | analytique | 1331.0 | 7.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | non régression | 1412.2509021789 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | analytique | 889.3176 | 7.5% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | non régression | 955.70263804746 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | non régression | 1412.2509021788 | 1.0% |

Tableau 3.3-1 : Valeurs testées

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

4.2 Caractéristiques du maillage

On utilise un maillage constitué de 100 éléments QUAD9.

4.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 4 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|----------------------|-----------|----------------|-----------|---------------|
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | non régression | 1444.1 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | non régression | 1444.1 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | non régression | 990.9 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | non régression | 1444.1 | 1.0% |

Tableau 4.3-1 : Valeurs testées

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUC. Cette modélisation correspond à la modélisation Volumes Finis centrés (pour les termes darcéens et fickiens). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 100 éléments QUAD9.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Les résultats sont identiques que ceux obtenus avec la modélisation Volumes finis décentrés sur la maille.

On effectue des tests sur 4 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|----------------------|-----------|----------------|-----------------|---------------|
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 0) N304 | 100 | non régression | 1444.0876929334 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | analytique | 1331.0 | 9.0% |
| PRE2 | (0,075; 1) N293 | 100 | non régression | 1444.0876929335 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | analytique | 889.3176 | 9.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N469 | 100 | non régression | 1444.0876929335 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | analytique | 1331.0 | 12.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,5) NQ95 | 100 | non régression | 990.94043287847 | 1.0% |

Tableau 5.3-1 : Valeurs testées

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation D

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis classiques. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 100 éléments QUAD8.

6.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|-------------------|-----------|----------------|-----------------|---------------|
| PRE2 | (0,05; 0) N104 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05; 0) N104 | 100 | non régression | 992.8591566774 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05; 1) N103 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05; 1) N103 | 100 | non régression | 992.85915667759 | 1.0% |

Tableau 6.3-1 : Valeurs testées

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUDM. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis avec décentrage sur la maille voisine pour les termes de mobilités (les termes fickiens sont moyennés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le but est ici de valider ce schéma sur des mailles triangles.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA7.

7.3 Grandeurs testées et résultats

On trace les profils de pression de gaz à différents temps ainsi que la solution analytique à ces mêmes instants. Nous sommes ici faiblement non linéaire, il est normal que les courbes soient légèrement éloignées de la solution analytique.

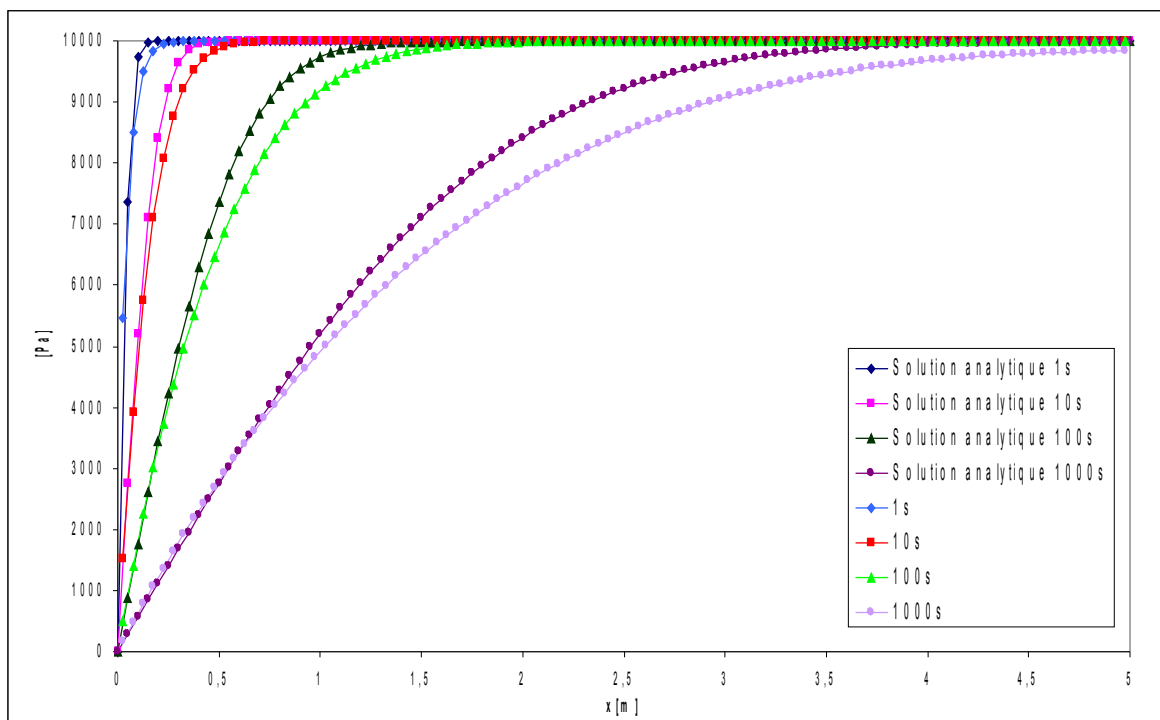


Illustration 2: Profils de pressions de gaz

On effectue des tests sur 3 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance |
|----------|---------------------------|-----------|----------------|-----------------|-----------|
| PRE2 | $(0,075; 0)$ N360 | 100 | analytique | 1331.0 | 10.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0)$ N360 | 100 | non régression | 1454.395434045 | 1.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0,025)$ N505 | 100 | analytique | 1331.0 | 10.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0,025)$ N505 | 100 | non régression | 1450.3938034156 | 1.0% |
| PRE2 | $(0,016; 0,0158)$ NT70 | 100 | non régression | 353.97760862167 | 1.0% |

Tableau 7.3-1 : Valeurs testées

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volumes Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA7.

8.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique et sur 3 nœuds à 1 instant en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|---------------------------|-----------|----------------|-----------|---------------|
| PRE2 | $(0,075; 0)$ N360 | 100 | analytique | 1331.0 | 11.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0)$ N360 | 100 | non régression | 1454.4 | 1.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0,025)$ N505 | 100 | analytique | 1331.0 | 10.0% |
| PRE2 | $(0,075; 0,025)$ N505 | 100 | non régression | 1450.4 | 1.0% |
| PRE2 | $(0,016; 0,0158)$ NT70 | 100 | non régression | 353.978 | 1.0% |

Tableau 8.3-1: Valeurs testées

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUC. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis centré (pour les termes darcéens et fickiens). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

9.2 Caractéristiques de la modélisation

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA7.

9.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique et sur 3 nœuds à 1 instant en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|-------------------------|-----------|----------------|-----------|---------------|
| PRE2 | (0,075; 0) N360 | 100 | analytique | 1473.0 | 10.0% |
| PRE2 | (0,075; 0) N360 | 100 | non régression | 1473.3 | 1.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,025) N505 | 100 | analytique | 1472.0 | 10.0% |
| PRE2 | (0,075; 0,025) N505 | 100 | non régression | 1472.4 | 1.0% |
| PRE2 | (0,016; 0,0158) NT70 | 100 | non régression | 353.978 | 1.0% |

Tableau 9.3-1 : Valeurs testées

10 Modélisation H

10.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

10.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA6.

10.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|---------------------|-----------|----------------|-----------|---------------|
| PRE2 | (0,05;0) N103 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05;0) N103 | 100 | non régression | 992.699 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05;0,05) N203 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05;0,05) N203 | 100 | non régression | 993.06 | 1.0% |

Tableau 10.3-1 : Valeurs testées

11 Modélisation I

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HS. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est GAZ.

11.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA6.

11.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à l'instant $t=100\text{ans}$ une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

| Grandeur | Points (x, y) | Temps (s) | Type référence | Référence | Tolérance (%) |
|----------|----------------------|-----------|----------------|-----------|---------------|
| PRE2 | (0,05; 0,05) N103 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05; 0,05) N103 | 100 | non régression | 992.699 | 1.0% |
| PRE2 | (0,05; 0) N203 | 100 | analytique | 889.3176 | 12.0% |
| PRE2 | (0,05; 0) N203 | 100 | non régression | 993.06 | 1.0% |

Tableau 11.3-1 : Valeurs testées

12 Synthèse des résultats

Ce cas test permet de tester les schémas volumes finis dans différentes configurations sur une modélisation d'écoulement gazeux:

- les 3 schémas volumes finis : centré, décentré arête, décentré maille ;
- sur différents types de mailles (triangles et rectangles).

Ces mêmes cas sont également réalisés avec les schémas éléments finis classiques. Tous les résultats sont très proches de la solution analytique.

D'un point de vue performance, on préconisera l'utilisation du schéma décentré arête.