

Intégration des relations de comportement viscoélastiques dans l'opérateur STAT_NON_LINE

Résumé

Ce document décrit dans le cas des comportements viscoélastiques les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre de l'algorithme non-linéaire STAT_NON_LINE décrit en [R5.03.01]. Les données d'entrée de toutes les relations de comportement viscoélastiques intégrées dans Aster ont de manière générale la même forme. Seule la façon d'introduire la donnée principale (la fonction vitesse de déformation visqueuse) varie : elle est présentée suivant les différents mot-clés qui permettent à l'utilisateur de choisir la relation de comportement souhaitée.

Ces quantités sont calculées par une méthode d'intégration semi-implicite ou implicite. A partir de l'état initial, ou à partir de l'instant de calcul précédent, on calcule le champ de contraintes résultant d'un incrément de déformation.

Table des matières

1	Introduction.....	3
2	Relation continue.....	3
3	Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement.....	4
3.1	Relation LEMAITRE.....	4
3.2	Relation de LEMAITRE dépendant de la fluence(LEMAITRE_IRRA).....	4
3.2.1	Formulation du modèle.....	4
3.2.2	Traitement de la dépendance vis à vis de la fluence.....	5
3.3	Relation LEMA_SEUIL.....	5
3.4	Relation VISC_IRRA_LOG.....	5
3.5	Relation GATT_MONERIE.....	6
4	Intégration de la relation de comportement.....	9
4.1	Établissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants.....	9
4.2	Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZEROF2.....	11
4.3	Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant.....	13
4.4	Schéma semi-implicite.....	14
4.5	Cas particulier de la loi GATT_MONERIE.....	15
4.6	Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température.....	17
5	Calcul de l'opérateur tangent.....	18
6	Bibliographie.....	19
7	Description des versions du document.....	19

1 Introduction

On décrit ici l'implémentation du modèle de viscoélasticité non-linéaire de Lemaître, qui peut se ramener pour certaines valeurs particulières des paramètres à une relation de comportement viscoélastique de Norton.

Une variante (dépendant de la fluence) de ce modèle de Lemaître a été ajoutée, en vue de la modélisation des assemblages combustibles (mot-clé `LEMAITRE_IRRA`). Ce modèle a pour particularité de comporter une déformation anélastique supplémentaire : la déformation de grandissement.

Un modèle viscoélastique avec seuil a été ajouté. Il s'agit d'un matériau dont le comportement est purement élastique jusqu'à un seuil puis une fois ce seuil dépassé, la relation de comportement devient un cas particulier de la relation de Lemaître (`LEMA_SEUIL`).

Un modèle développé spécifiquement pour représenter le comportement viscoélastique non linéaire des pastilles de dioxyde-d'Uranium a plus récemment été introduit. Ce modèle, intitulé `GATT_MONERIE`, présente l'intérêt d'avoir été recalé sur une large base expérimentale (essais de compression sur différents produits dans une large gamme de température, de charge et de vitesse de sollicitation). Les effets des porosités de fabrication, de taille de grain et de température sur la vitesse de fluage stationnaire des pastilles ont, en particulier, pu être identifiés sur ces essais.

Enfin, un modèle viscoélastique avec fluage en logarithme de la fluence a été implanté, il est accessible par le mot-clef `VISC_IRRA_LOG`.

Pour chacun de ces modèles, on suppose que le matériau est isotrope (sauf pour la déformation de grandissement, qui, elle, est uniaxiale). Ils peuvent être utilisés en 3D, en déformations planes (`D_PLAN`) et en axisymétrique (`AXIS`).

On présente dans cette note les équations constitutives des modèles et leur implantation dans `Code_Aster`.

2 Relation continue

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et on scinde le tenseur des déformations en une partie élastique, une partie thermique, une partie anélastique (connue) et une partie visqueuse. Les équations sont alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} &= \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_v \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{A}(T) \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v &= g(\sigma_{eq}, \lambda, T) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_{eq}}\end{aligned}$$

avec :

$$\lambda : \text{déformation visqueuse cumulée} \quad \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \text{déviateur des contraintes} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

$$\sigma_{eq} : \text{contrainte équivalente} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\mathbf{A}(T) : \text{tenseur d'élasticité}$$

3 Nature de la fonction g pour chacune des relations de comportement

3.1 Relation LEMAITRE

Dans ce cas, g s'exprime de façon explicite (σ est ici un scalaire) :

$$g(\sigma, \lambda, T) = \left(\frac{1}{K} \frac{\sigma}{\lambda^{1/m}} \right)^n \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} \geq 0, \frac{1}{m} \geq 0, n > 0$$

Les données des caractéristiques de matériaux sont celles fournies sous les mots clés facteurs LEMAITRE ou LEMAITRE_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU.

$$\text{LEMAITRE} = _F(N=n, \quad \text{UN_SUR_K} = \frac{1}{K}, \quad \text{UN_SUR_M} = \frac{1}{m})$$

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

3.2 Relation de LEMAITRE dépendant de la fluence (LEMAITRE_IRRA)

Ce paragraphe décrit la dépendance vis à vis de la fluence (et son traitement) de la relation de comportement viscoplastique de J. Lemaître, introduite pour la modélisation des assemblages combustibles et applicable aux éléments 2D et 3D massifs et aux éléments TUYAU, sous le mot-clé LEMAITRE_IRRA..

3.2.1 Formulation du modèle

Les équations sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_v = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma^D}{\sigma_{eq}} \\ \dot{p} = \left[\frac{\sigma_{eq}}{p^{1/m}} \right]^n \left(\frac{1}{K} \frac{\Phi}{\Phi_0} + L \right)^\beta e^{-\frac{Q}{R(T+T_0)}} \\ \underbrace{(A^{-1}(T)\sigma)} = \dot{\varepsilon}_{tot} - \dot{\varepsilon}_v - \dot{\varepsilon}_g - \dot{\varepsilon}_{th} \end{array} \right.$$

avec :

$$T_0 = 273,15^\circ C$$

$$n > 0, \quad 1/K \geq 0, \quad 1/m \geq 0$$

$$\Phi_0 > 0, \quad Q/R \geq 0, \quad L \geq 0, \quad \beta \text{ réel quelconque}$$

Les coefficients sont fournis sous les mots-clés LEMAITRE_IRRA et ELAS de DEFI_MATERIAU et ϕ est le flux neutronique (quotient de l'incrément de fluence, définie par le mot-clé AFFE_VARC de AFFE_MATERIAU, par l'incrément de temps).

La loi de grandissement est : $\varepsilon_g(t) = f(T, \Phi_t) \varepsilon_g^0$ avec ε_g^0 déformation uniaxiale unité dans un repère R_1 donné par l'utilisateur à l'aide du mot-clé MASSIF (voir [U4.42.01] et [U4.43.01]) et $f(T, \Phi_t)$ est également une fonction définie par l'utilisateur dans DEFI_MATERIAU ([U4.43.01]).

Remarques :

La fluence, le temps et le flux Φ_0 doivent être exprimés en des unités telles que le rapport Φ/Φ_0 soit sans dimension. Q/R est en Kelvin. T est en $^{\circ}C$.

3.2.2 Traitement de la dépendance vis à vis de la fluence

Le modèle décrit ci-dessus correspond en fait à une loi de Lemaître normale, définie par les trois coefficients n , $1/K'$ et $1/m$ avec :

$$\frac{1}{K'} = \left(\frac{1}{K} \frac{\Phi}{\Phi_0} + L \right)^{\beta/n} e^{-\frac{Q}{nR(T+T_0)}}$$

Il suffit donc de calculer $1/K'$ et de le fournir comme donnée au calcul à la place de $1/K$. Par ailleurs, dans le calcul de la contrainte élastique, on ajoute aux déformations anélastiques (nulle par défaut) la déformation de grandissement exprimée ci-dessus, après avoir effectué le changement de repère entre le repère local et le repère R_1 .

3.3 Relation LEMA_SEUIL

Pour ce comportement, g s'exprime aussi de façon explicite (puisque'il s'agit d'un cas particulier de la relation de LEMAITRE présenté ci dessus) :

Si $D \leq 1$ alors $g(\sigma, \lambda, T) = 0$ (comportement purement élastique)

Si $D > 1$ alors $g(\sigma, \lambda, T) = A \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma \right) \Phi$ avec $A \geq 0$, $\Phi \geq 0$

$$\text{Avec : } D = \frac{1}{S} \int_0^t \sigma_{eq}(u) du$$

Les données matériaux à renseigner par l'utilisateur doivent être fournies sous le mot clé LEMA_SEUIL ou LEMA_SEUIL_FO de l'opérateur DEFI_MATERIAU :

$$\text{LEMA_SEUIL} = _F(A=A, \quad S=S)$$

Quant au paramètre Φ , il s'agit du flux de neutron qui bombarde le matériau (quotient de l'incrément de fluence, définie par le mot-clé AFFE_VARC de AFFE_MATERIAU, par l'incrément de temps).

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots clés facteurs ELAS ou ELAS_FO.

3.4 Relation VISC_IRRA_LOG

Pour cette relations, g ne s'exprime pas de façon explicite. Le comportement est représenté par un essai de fluage unidimensionnel, à contrainte constante, qui fait intervenir le temps écoulé depuis l'instant où l'on applique la contrainte. La relation de comportement est ici définie par la donnée de quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 décrivant l'évolution de la déformation visqueuse au cours du temps :

$$\varepsilon_v = \lambda = f_1(t) g_1(\sigma, T) + f_2(t) g_2(\sigma, T) \quad \text{éq 3.4-1}$$

La fonction g se calcule alors numériquement en éliminant le temps t de la manière suivante :

- 1) pour un triplet donné (σ, λ, T) , on résout en t l'équation [éq 3.2-1] par la méthode de Newton (voir [bib2]). On trouve une approximation de la solution $t(\sigma, \lambda, T)$,
- 2) on obtient la valeur de la fonction g en (σ, λ, T) en dérivant par rapport au temps l'équation [éq 3.2-1] (voir [bib1]) :

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f'_1(t)g_1(\sigma, T) + f'_2(t)g_2(\sigma, T)$$

et en substituant dans cette nouvelle équation la valeur de $t(\sigma, \lambda, T)$ trouvée précédemment. On trouve la formulation uniaxiale suivante :

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\lambda} = g(\sigma, \lambda, T) = f'_1(t(\sigma, \lambda, T))g_1(\sigma, T) + f'_2(t(\sigma, \lambda, T))g_2(\sigma, T)$$

La forme des quatre fonctions f_1, g_1, f_2, g_2 est prédéfinie et l'utilisateur n'introduit que quelques paramètres dans le fichier de commande.

Pour `VISC_IRRA_LOG`, on a :

$$f_1(t) = \ln(1 + \omega \cdot \Phi \cdot t)$$

$$g_1(\sigma, T) = A \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{Q}{T}}$$

$$f_2(t) = \Phi \cdot t$$

$$g_2(\sigma, T) = B \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{Q}{T}}$$

Le paramètre Φ , est le flux de neutrons. Il est soit renseigné dans `DEFI_MATERIAU`, soit pris égal à 1 et doit alors être renseigné sous le mot-clé facteur `AFPE_VARC`.

Les paramètres A , B , ω et Q sont ceux fournis sous le mot clé facteur `VISC_IRRA_LOG` de l'opérateur `DEFI_MATERIAU`.

On notera que, pour toutes les fonctions :

t s'exprime en heures

T s'exprime en $^{\circ}C$

σ s'exprime en MPa

Il faut donc rentrer des données cohérentes avec ces unités dans le fichier de commande et dans le fichier de maillage.

Le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν sont ceux fournis sous les mots-clés facteurs `ELAS` ou `ELAS_FO`.

3.5 Relation `GATT_MONERIE`

Du fait des porosités résiduelles de fabrication affectant les pastilles combustible élaborées par frittage, la vitesse de déformation visqueuse inclue une composante de dilatation, dépendant du cisaillement et de la contrainte moyenne selon :

$$\dot{\varepsilon}_v = g(\sigma_{eq}, \sigma_m, \lambda, f, T) \frac{3}{2} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} + g_d(\sigma_{eq}, \sigma_m, \lambda, f, T) \frac{1}{3} I$$

avec :

f : fraction volumique de porosité

σ_m : contrainte moyenne $\sigma_m = \frac{1}{3} Tr(\sigma)$

Les fonctions (g, g_d) dérivent d'un potentiel de dissipation $\Psi(\sigma_{eq}, \sigma_m, \lambda, f, T)$ selon :

$$g = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{eq}}, \quad g_d = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_m}.$$

Ce potentiel de dissipation ne dépend pas de la déformation plastique cumulée (voir [3]) et s'écrit :

$$\Psi(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, T) = (1 - \theta(\sigma_Y, T)) \Psi_1(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, T) + \theta(\sigma_Y) \Psi_2(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, T)$$

avec :

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{B_1}{B_1 + \frac{A_1}{4}} \sigma_{eq}^2 + \frac{9A_1}{4B_1 + A_1} \sigma_m^2}$$

(Ψ_1, Ψ_2) correspondant à deux régimes d'écoulement visqueux distincts (basse contrainte et forte contrainte) définis par :

$$\Psi_i(\sigma_{eq}, \sigma_m, f) = \frac{\dot{\varepsilon}_{0i} \sigma_{0i}}{n_i + 1} \left[A_i(f) \left(\frac{3 \sigma_m}{2 \sigma_{0i}} \right)^2 + B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right)^2 \right]^{\frac{n_i + 1}{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}_{0i} = \dot{\varepsilon}_{0i} \chi_i(d) e^{-\frac{Q_i}{RT}}$$

χ_i fonctions de la taille de grain telles que : $\chi_1(d) = d^{-2}$, $\chi_2(d) = 2d_0^2 \left(1 - \cos\left(\frac{d}{d_0}\right) \right)$

les coefficients (A_i, B_i) sont déduits d'une analyse micromécanique :

$$A_i(f) = \left(n_i \left(f^{-\frac{1}{n_i} - 1} \right) \right)^{\frac{-2n_i}{n_i + 1}}, \quad B_i(f) = \left(1 + \frac{2}{3} f \right) (1 - f)^{\frac{-2n_i}{n_i + 1}},$$

θ fonction de couplage dépendant du premier invariant des contraintes et de la température

la loi d'évolution de la porosité est donnée par : $\dot{f} = (1 - f) Tr(\dot{\varepsilon}_v)$

L'expression finale de la fonction g est :

$$g(\sigma_{eq}, \sigma_m) = (1 - \theta) \frac{d\Psi_1}{d\sigma_{eq}} + \theta \frac{d\Psi_2}{d\sigma_{eq}} + \frac{d\theta}{d\sigma_{eq}} (\Psi_2 - \Psi_1)$$

$$\frac{d\Psi_i}{d\sigma_{eq}} = \dot{\varepsilon}_{0i} B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right) \left[A_i(f) \left(\frac{3 \sigma_m}{2 \sigma_{0i}} \right)^2 + B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right)^2 \right]^{\frac{n_i - 1}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma_{eq}} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh^2(\phi(\sigma_l)) \right] \frac{d\phi}{d\sigma_{eq}}$$

$$\begin{cases} \Phi(\sigma_Y) = \frac{T - \tilde{T}(\sigma_Y)}{h} \\ \tilde{T}(\sigma_Y) = w \sigma_Y^q \end{cases} \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\sigma_{eq}} = \frac{d\Phi}{d\sigma_Y} \frac{d\sigma_Y}{d\sigma_{eq}} = \frac{-B_1 q w \sigma_{eq} \sigma_Y^{q-2}}{\left(B_1 + \frac{A_1}{4} \right) h}$$

alors que celle de la fonction g_d est :

$$g_d(\sigma_{eq}, \sigma_m) = (1 - \theta) \frac{d\phi_1}{d\sigma_m} + \theta \frac{d\phi_2}{d\sigma_m} + \frac{d\theta}{d\sigma_m} (\phi_2 - \phi_1)$$

$$\frac{d\Psi_i}{d\sigma_m} = \dot{\varepsilon}_{0i} A_i(f) \left(\frac{9\sigma_m}{4\sigma_{0i}} \right) \left[A_i(f) \left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_{0i}} \right)^2 + B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right)^2 \right]^{\frac{n_i-1}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma_m} = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh^2(\phi(\sigma_Y)) \right] \frac{d\phi}{d\sigma_m}$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma_Y) = \frac{T - \tilde{T}(\sigma_Y)}{h} \\ \tilde{T}(\sigma_Y) = w \sigma_Y^q \end{cases} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\sigma_m} = \frac{d\phi}{d\sigma_Y} \frac{d\sigma_Y}{d\sigma_m} = \frac{-9 A_1 q w \sigma_m \sigma_l^{q-2}}{(4 B_1 + A_1) h}$$

Les valeurs des différentes constantes du modèle sont :

$$\begin{aligned} n_1 &= 1.0, \quad Q_1 = 377 \cdot 10^3 \text{ J/mol}, \quad \tilde{\varepsilon}_{01} = 2,725 \cdot 10^{-10} \text{ Pa/h} \\ n_2 &= 8.0, \quad Q_2 = 462 \cdot 10^3 \text{ J/mol}, \quad \tilde{\varepsilon}_{02} = 9,14 \cdot 10^{-41} \text{ Pa/h}, \quad d_0 = 15 \text{ microns} \\ \sigma_{01} &= \sigma_{02} = 1 \text{ Pa} \\ h &= 600 \text{ K}, \quad q = -0.189, \quad w = 47350.4 \end{aligned}$$

Les paramètres positifs $\tilde{\varepsilon}_{01}$, $\tilde{\varepsilon}_{02}$, d ainsi que la valeur initiale de la fraction volumique de pores sont ceux fournis sous le mot clé facteur GATT_MONE de l'opérateur DEFINI_MATERIAU :

$$\begin{aligned} \text{GATT_MONERIE} &= _F(\text{EPSI_01} = \dot{\tilde{\varepsilon}}_{01}, \\ &\text{EPSI_02} = \dot{\tilde{\varepsilon}}_{02}, \\ &\text{PORO_INIT} = f(0), \\ &\text{GRAIN_COMB} = d) \end{aligned}$$

4 Intégration de la relation de comportement

4.1 Établissement de l'équation scalaire pour le schéma implicite et avec des coefficients élastiques constants

On désigne par ε_{tot} la déformation totale à l'instant $t+\Delta t$ et par $\Delta\varepsilon_{tot}$ la variation de déformation totale au cours du pas de temps courant.

On appelle ε_o la déformation à l'instant $t+\Delta t$ résultant de la dilatation thermique et des déformations anélastiques (parmi lesquelles figurent éventuellement les déformations de grandissement, cf [§3.2]). On a donc :

$$\Delta\varepsilon_o = \left[\alpha(t+\Delta t)(T(t+\Delta t) - T_{ref}) - \alpha(t)(T(t) - T_{ref}) \right] I_3 + \varepsilon_a(t+\Delta t) - \varepsilon_a(t)$$

où I_3 est le tenseur identité d'ordre 2 en dimension 3.

On pose $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{tot} - \Delta\varepsilon_o$

Comme on suppose ici que μ est constant, on a la relation suivante entre les déviateurs de $\Delta\sigma$ et $\Delta\varepsilon$:

$$\Delta\tilde{\sigma} = 2\mu(\Delta\tilde{\varepsilon} - \Delta\varepsilon_v) \quad \text{éq 4.1-1}$$

Or, la loi d'écoulement s'écrit, de façon implicite :

$$\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta\varepsilon_v)_{eq}, T) \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \quad \text{éq 4.1-2}$$

On a donc, en éliminant $\Delta\varepsilon_v$ entre [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2] :

$$2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} = \Delta\tilde{\sigma} + 3\mu\Delta t \cdot g(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta\varepsilon_v)_{eq}, T) \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{eq}} \quad \text{éq 4.1-3}$$

$$(\tilde{\sigma}^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}) = \left(1 + 3\mu\Delta t \frac{g(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta\varepsilon_v)_{eq}, T)}{\sigma_{eq}} \right) \tilde{\sigma}$$

En posant $\tilde{\sigma}^e = \tilde{\sigma}^- + 2\mu \Delta \tilde{\xi}$, on a donc :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu \Delta t . g \left(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta \varepsilon_v)_{eq}, T \right) + \sigma_{eq} \quad \text{éq 4.1-4}$$

Or, on a d'après [éq 4.1-2] :

$$(\Delta \varepsilon_v)_{eq} = \Delta t . g \left(\sigma_{eq}, \lambda^- + (\Delta \varepsilon_v)_{eq}, T \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^e &= 3\mu (\Delta \varepsilon_v)_{eq} + \sigma_{eq} \\ (\Delta \varepsilon_v)_{eq} &= \frac{1}{3\mu} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}) \end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression dans [éq 4.1-4], on a :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu \Delta t . g \left(\sigma_{eq}, \lambda^- + \frac{1}{3\mu} (\sigma_{eq}^e - \sigma_{eq}), T \right) + \sigma_{eq}$$

Si l'on pose, $\sigma_{eq}^e, \lambda^-, T$ et Δt étant connus :

$$f(x) = 3\mu \Delta t . g \left(x, \lambda^- + \frac{1}{3\mu} (\sigma_{eq}^e - x), T \right) + x - \sigma_{eq}^e$$

on peut alors calculer la quantité $\sigma_{eq} = (\sigma^- + \Delta \sigma)_{eq}$ comme étant la solution de l'équation scalaire :

$f(x) = 0$ où $x = \sigma_{eq}$, convention adoptée pour les paragraphes suivants.

Dans le cas d'une loi de Lemaître avec seuil, LEMA_IRRA_SEUIL, les équations précédentes ne sont utiles qu'une fois le seuil franchi. En effet en-deçà du seuil le comportement est élastique.

On discrétise le seuil implicitement :

$$D(\sigma^- + \Delta \sigma) = \frac{1}{S} \int_0^t (\sigma^- + \Delta \sigma)_{eq}(u) du$$

De la même façon que pour l'intégration des lois de comportement élasto-plastique de Von-Mises, on distingue alors deux cas.

$$D(\sigma^- + \Delta \sigma) \leq 1 \quad \text{alors} \quad g(\sigma^- + \Delta \sigma, \lambda, T) = 0$$

$$D(\sigma^- + \Delta \sigma) > 1 \quad \text{alors} \quad g(\sigma^- + \Delta \sigma, \lambda, T) = A . \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{eq} \right) \Phi$$

Il en résulte à partir de l'équation ci-dessus :

$$g(\sigma^- + \Delta \sigma, \lambda, T) \neq A . \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{eq} \right) \Phi \quad \text{implique} \quad D(\sigma^- + \Delta \sigma) \leq 1$$

Or g ne peut prendre que la valeur 0 ou $A \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{eq} \right) \Phi$ donc

$g(\sigma^- + \Delta \sigma, \lambda, T) \neq A \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{eq} \right) \Phi$ implique $D(\sigma^- + \Delta \sigma) \leq 1$ et $\Delta \sigma = A \cdot \Delta \varepsilon$

soit $g(\sigma^- + \Delta \sigma, \lambda, T) = A \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{eq} \right) \Phi$ alors $D(\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon) > 1$

Le critère de franchissement du seuil peut donc s'écrire $D(\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon) > 1$

Or $D(\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon) = \frac{1}{S} \int_0^t (\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon)_{eq}(u) du$

En discrétisant le temps, on a alors :

$$D(\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon) = \frac{1}{S} \int_0^{t^-} (\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon)_{eq}(u) du + \frac{1}{S} \int_{t^-}^t (\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon)_{eq}(u) du$$

$$D(\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon) = \frac{1}{S} \left(D^- S + \frac{\sigma_{eq}^- + (\sigma^- + A \cdot \Delta \varepsilon)_{eq}(t - t^-)}{2} (t - t^-) \right)$$

4.2 Résolution de l'équation scalaire : principe de la routine ZEROF2

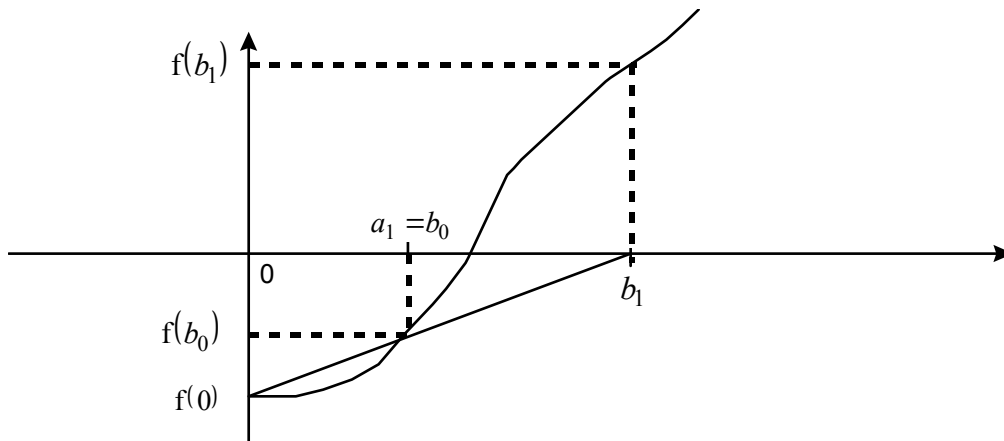
On montre facilement que, si les conditions requises au paragraphe [§3] sur les caractéristiques des matériaux sont vérifiées, la fonction f est strictement croissante et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Si $\sigma_{eq}^e = 0$, alors la solution est $x = 0$. Sinon, on a : $f(0) = -\sigma_{eq}^e < 0$

Le problème consiste donc à trouver pour une fonction f quelconque la solution de l'équation $f(x) = 0$ sachant que cette solution existe, que $f(0) < 0$ et que f est strictement croissante.

L'algorithme adopté dans ZEROF2 est le suivant :

- on part de $a_0 = 0$ et $b_0 = x_{ap}$ où x_{ap} est une approximation de la solution. Si c'est nécessaire (c'est-à-dire si $f(b_0) < 0$), on se ramène par la méthode des sécantes ($z_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ puis $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = z_n$) en une ou plusieurs itérations au cas où $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$:



(Dans le cas de la figure ci-dessus, cette première phrase s'est faite en une itération : $a_1=b_0$ et $f(b_1)>0$).

- on calcule $N_d = \text{partie entière}(\sqrt{N_{\max}})$ où N_{\max} est le nombre maximum d'itérations que l'on s'est donné. On résout alors l'équation par la méthode des sécantes en utilisant toutefois la méthode de dichotomie à chaque fois que n est multiple de N_d :

```

1)
Si  $N_d$  divise  $n$ 
    
$$z_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

sinon
    
$$z_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

finsi
 $n = n + 1$ 
si  $|f(z)| > \varepsilon$ 
    si  $f(z) < 0$ 
         $a_{n+1} = z_n$      $b_{n+1} = b_n$ 
    sinon
         $a_{n+1} = a_n$      $b_{n+1} = z_n$ 
    finsi
    aller en 1)
sinon
    La solution est :  $x = z_n \rightarrow \text{FIN}$ 
finsi
    
```

Cette deuxième partie de l'algorithme permet de traiter en un nombre d'itérations raisonnable les cas où f est très fortement non-linéaire, alors que la méthode des sécantes aurait convergé trop lentement. Ces cas de forte non-linéarité se rencontrent notamment avec la loi de LEMAITRE, pour des valeurs de $\frac{n}{m}$ grandes.

4.3 Calcul de la contrainte à la fin du pas de temps courant

D'après [éq 4.1-3], si x est la solution de l'équation scalaire, en posant :

$$b(x, \sigma_{eq}^e) = \frac{1}{1 + 3\mu \Delta t \frac{g\left(x, \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - x), T\right)}{x}} = \frac{x}{\sigma_{eq}^e}$$

on a :

$$\tilde{\sigma} = b(x, \sigma_{eq}^e) \tilde{\sigma}^e \quad \text{éq 4.3-1}$$

Dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$, ce qui équivaut d'après l'équation scalaire à $x = 0$, on prolonge b par continuité. Pour cela, on pose $y(x) = \lambda^- + \frac{1}{3\mu}(\sigma_{eq}^e - x)$ et $G(x) = g(x, y(x), T)$. La dérivée de G s'exprime en fonction des dérivées partielles de g au point $(x, y(x), T)$:

$$G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y(x), T) - \frac{1}{3\mu} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x), T)$$

Le prolongement de b par continuité donne alors :

$$b(0,0) = \frac{1}{1 + 3\mu \Delta t G'(0)}$$

et on a, toujours dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$, $\tilde{\sigma} = 0$.

Une fois que l'on a calculé $\tilde{\sigma}$, on obtient σ par la relation (K est ici supposé constant) :

$$\sigma = \sigma^- + \Delta \sigma = \tilde{\sigma} + \left(\frac{1}{3} Tr(\sigma^-) + K Tr(\Delta \varepsilon) \right) I_3 \quad \text{éq 4.3-2}$$

4.4 Schéma semi-implicite

Avec un schéma numérique implicite [éq 4.1-2], dans le cas, par exemple, où g ne dépend pas de λ , seule intervient par le calcul de $\Delta \varepsilon_v$ la valeur de la contrainte en fin de pas de temps. Il peut en résulter des erreurs numériques importantes si la contrainte varie fortement au cours du temps (voir [bib2]).

Pour remédier à cela et améliorer la résolution, on discrétise la loi d'écoulement de façon semi-implicite :

$$\frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta t} = \frac{3}{2} g \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \varepsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right)}{\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}} \quad \text{éq 4.4-1}$$

Pour transformer de la façon la plus économique ce qui a été programmé précédemment (en suivant la formulation implicite [éq 4.1-2]), il suffit de diviser chaque membre de l'équation [éq 4.4-1] par 2 :

$$\frac{(\Delta \varepsilon_v / 2)}{\Delta t} = \frac{3}{2} \frac{g \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \varepsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right) \left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right)}{2 \left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}}$$

et de faire la même chose avec la relation [éq 4.1-1] :

$$\frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} = 2 \mu \left(\frac{\Delta \tilde{\varepsilon}}{2} - \frac{\Delta \varepsilon_v}{2} \right)$$

On constate que ce système est de la même forme que celui constitué par les équations [éq 4.1-1] et [éq 4.1-2], la donnée étant $\frac{\Delta \varepsilon}{2}$ au lieu de $\Delta \varepsilon$, les inconnues étant respectivement $\frac{\Delta \sigma}{2}$ et $\frac{\Delta \varepsilon_v}{2}$

au lieu de $\Delta \sigma$ et $\Delta \varepsilon_v$, et la fonction $\frac{g}{2}$ remplaçant la fonction g .

On peut donc utiliser la résolution des paragraphes [§4.1] à [§4.3] ainsi que l'algorithme correspondant en introduisant $\frac{\Delta \varepsilon}{2}$ et en divisant la fonction g par 2. Il reste alors à multiplier les résultats $\frac{\Delta \sigma}{2}$

et $\frac{\Delta \varepsilon_v}{2}$ par 2 pour obtenir les incréments de contrainte et de déformation visqueuse calculés par le schéma semi-implicite (le $\Delta \sigma$ et le $\Delta \varepsilon_v$ de l'équation [éq 4.4-1]).

On remarquera que le calcul de l'opérateur tangent n'est pas affecté par cette modification du schéma numérique. En effet, on a évidemment :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \left(\frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{\partial \left(\frac{\Delta \varepsilon}{2} \right)}$$

4.5 Cas particulier de la loi GATT_MONERIE

Si on reprend le raisonnement du §4.2, on obtient l'équation :

$$\sigma_{eq}^e = 3\mu \cdot \Delta t \cdot g(\sigma_{eq}, \sigma_m, f, T) + \sigma_{eq} \quad \text{éq 4.5-1}$$

Le fait que cette loi ne dépende pas de la déformation plastique cumulée simplifie donc cette équation. En revanche, une inconnue supplémentaire est introduite : la fraction volumique de porosité. Une autre équation est donc nécessaire. Pour la trouver, il suffit d'écrire la loi de Hooke liant les parties sphériques des incréments de contrainte et de déformation élastique selon :

$$Tr(\Delta \sigma) = 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - Tr(\Delta \varepsilon_v) \right)$$

Sachant par ailleurs que :

$$Tr(\Delta \varepsilon_v) = \frac{\Delta f}{1-f},$$

on peut exprimer la contrainte moyenne en fonction de la fraction volumique de porosité, i.e. :

$$\Delta \sigma_m = K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f}{1-f} \right),$$

ce qui nous conduit à la seconde équation scalaire :

$$\Delta f - (1-f) g_d \left(\sigma_{eq}, \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f}{1-f} \right), f, T \right) = 0 \quad \text{éq 4.5-2}$$

Nous obtenons donc deux équations scalaires couplées dont les inconnues sont la contrainte équivalente et la fraction volumique de porosité :

$$\begin{cases} 3\mu \Delta t \cdot g \left(\sigma_{eq}, \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f}{1-f} \right), f, T \right) + \sigma_{eq} - \sigma_{eq}^e = 0 \\ \Delta f - (1-f) g_d \left(\sigma_{eq}, \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f}{1-f} \right), f, T \right) = 0 \end{cases}$$

Notons f_d la fonction scalaire définie par :

$$f_d(x) = x - f^- - (1-x) g_d \left(\sigma_{eq}, \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{x-f^-}{1-x} \right), x, T \right),$$

expression dans laquelle la contrainte équivalente est considérée comme un paramètre donné.

On remarque que :

$$f_d(0) = -f^- \leq 0.$$

Par ailleurs, le signe de la trace de la vitesse de déformation viscoplastique est déterminé par le signe de la contrainte moyenne et cette fonction de la porosité :

$$\sigma_m(x) = \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{x - f^-}{1 - x} \right)$$

est monotone décroissante sur l'intervalle $[0; 1 - f^-[$ et présente une asymptote verticale sur la borne supérieure de cet intervalle.

Compte-tenu de ces éléments, deux cas se présentent :

$$\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon) < 0 \Rightarrow \sigma_m(x) < 0 \quad \forall x \in [0; 1 - f^-[\quad : \text{dans ce cas } f_d(f^-) > 0 .$$

$$\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon) > 0 \Rightarrow \sigma_m(f_{rig}) = 0 \quad \text{avec } f_{rig} = (1 - f^-) \frac{\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon)}{1 + \sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon)} : \text{dans ce cas,}$$

$$f_d(f^-) < 0 \quad \text{et } f_d(f_{rig}) > 0 .$$

Dans tous les cas, nous disposons donc d'un encadrement de la solution. En revanche, la stricte monotonie de la fonction f_d à annuler n'est pas garantie.

Afin d'utiliser la routine ZEROF2, nous procédons à une résolution chaînée de ces deux équations scalaires. On effectue en effet deux appels imbriqués à ZEROF2 : le premier appel résout l'équation 4.5.2.

A chacune des itérations de cette résolution, l'incrément de porosité courant Δf^i permet de calculer $Tr(\Delta \sigma^i)$ selon :

$$Tr(\Delta \sigma^i) = 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f^i}{1 - f^- + \Delta f^i} \right),$$

puis σ_{eq}^i par résolution de l'équation 4.5.1 (deuxième appel à ZEROF2) :

$$3 \mu \Delta t . g \left(\sigma_{eq(i)}, \sigma_m^- + 3K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f_i}{1 - f^- - \Delta f_i} \right), \Delta f_i, T \right) + \sigma_{eq(i)} - \sigma_{eq}^e = 0 .$$

Une bonne approximation pour la porosité (x_{ap}) adoptée au début de ces itérations est obtenue selon :

$$\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon) < 0 \Rightarrow x_{ap} = f^- ,$$

$$\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon) > 0 \Rightarrow x_{ap} = f_{rig} = (1 - f^-) \frac{\sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon)}{1 + \sigma_m^- + 3K Tr(\Delta \varepsilon)} .$$

Une fois la convergence atteinte, le calcul des contraintes doit tenir compte de la variation de volume induite par les variations de fraction volumique de porosité. L'équation 4.3-2 doit donc être modifiée selon :

$$\sigma = \sigma^- + \Delta \sigma = \tilde{\sigma} + \left(\frac{1}{3} Tr(\sigma^-) + K \left(Tr(\Delta \varepsilon) - \frac{\Delta f}{1 - f} \right) \right) I_3$$

Enfin, les variations de porosité sont négligées lors du calcul de l'opérateur tangent de sorte que seule la dérivée de la fonction g par rapport à la contrainte équivalente est nécessaire :

$$\begin{cases} \frac{dG(\sigma_{eq})}{d\sigma_{eq}} = (1-\theta) \frac{d^2\psi_1}{d\sigma_{eq}^2} + \theta \frac{d^2\psi_2}{d\sigma_{eq}^2} + \frac{d^2\theta}{d\sigma_{eq}^2} (\psi_2 - \psi_1) + 2 \frac{d\theta}{d\sigma_{eq}} \frac{d(\psi_2 - \psi_1)}{d\sigma_{eq}} \\ \frac{d^2\psi_i}{d\sigma_{eq}^2} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \frac{d\psi_i}{d\sigma_{eq}} + \frac{n_i-1}{\sigma_{0i}} \dot{\varepsilon}_{0i} \left(B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right) \right)^2 \left[A_i(f) \left(\frac{3\sigma_m}{2\sigma_{0i}} \right)^2 + B_i(f) \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{0i}} \right)^2 \right]^{\frac{n_i-3}{2}} \\ \frac{d^2\theta}{d\sigma_{eq}^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{d\sigma_{eq}^2} [1 - th^2(\phi(\sigma_I))] - \left(\frac{d\phi}{d\sigma_{eq}} \right)^2 th(\phi(\sigma_I)) [1 - th^2(\phi(\sigma_I))] \\ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{d\sigma_{eq}^2} = \frac{d\theta}{d\sigma_{eq}} \left[\frac{1}{\sigma_{eq}} + \frac{9B_1(q-2)}{(4B_1+A_1)\sigma_I^2} \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} - 2 \frac{d\phi}{d\sigma_{eq}} th(\phi(\sigma_I)) \right] \end{cases}$$

Comme expliqué au §4.4, l'adaptation au cas semi-implicite se ramène à une simple division par deux des deux fonctions d'écoulement (g, g^d) .

Remarque : pour le calcul des coefficients $A1$ et $A2$ en fonction de la porosité, l'expression suivante a été utilisée :

$$A_i(f) = f^{\frac{2}{n_i+1}} \left(n_i \left(1 - f^{\frac{1}{n_i}} \right) \right)^{\frac{-2n_i}{n_i+1}}$$

Cette seconde expression présente en effet l'avantage d'être définie pour une porosité nulle.

4.6 Prise en compte de la variation des coefficients élastiques en fonction de la température

On a, si A est le tenseur d'élasticité :

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_v + \Delta (A^{-1} \sigma)$$

avec :

$$\Delta (A^{-1} \sigma) = A^{-1} (T^- + \Delta T) (\sigma^- + \Delta \sigma) - A^{-1} (T^-) \sigma^-$$

Ceci se traduit dans les équations du [§4.4] par :

$$2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\varepsilon}}{2} \right) - \left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \tilde{\sigma}}{2} \right) = 3\mu \Delta t \frac{g \left(\left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}, \lambda^- + \frac{(\Delta \varepsilon_v)_{eq}}{2}, T^- + \frac{\Delta T}{2} \right) \left(\tilde{\sigma}^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)}{2 \left(\sigma^- + \frac{\Delta \sigma}{2} \right)_{eq}} - \tilde{\sigma}^- \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right)$$

En posant :

$$\tilde{\sigma}^e = \left(\frac{2\mu^- + 2\mu}{4\mu^-} \right) \tilde{\sigma}^- + 2\mu \left(\frac{\Delta \tilde{\varepsilon}}{2} \right)$$

et

$$Tr(\sigma^e) = \left(\frac{3K^- + 3K}{6K^-} \right) Tr(\sigma^-) + 3K Tr\left(\frac{\Delta \varepsilon}{2}\right)$$

on se ramène exactement au cas précédent [§4.4].

5 Calcul de l'opérateur tangent

Dans le cas où $\sigma_{eq}^e = 0$ et $x = 0$, on prend le tenseur d'élasticité comme opérateur tangent.

Sinon, on obtient cet opérateur en dérivant l'équation [éq 4.3-1] par rapport à $\Delta \varepsilon$:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial b(x, \sigma_{eq}^e)}{\partial \Delta \varepsilon} \tilde{\sigma}^e + b(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial \tilde{\sigma}^e}{\partial \Delta \varepsilon}$$

puis en dérivant aussi [éq 4.3-2] par rapport à $\Delta \varepsilon$:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} + KI_3 \frac{\partial Tr(\Delta \varepsilon)}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon} + KI_3^t I_3$$

On notera que, dans ces équations, les tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4 sont respectivement assimilés à des vecteurs et à des matrices. I_3 est ici un tenseur d'ordre 2, assimilé à un vecteur :

$${}^t I_3 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

On a de plus :

$$\frac{\partial b(x, \sigma_{eq}^e)}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial b}{\partial x}(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial x}{\partial \Delta \varepsilon} + \frac{\partial b}{\partial \sigma_{eq}^e}(x, \sigma_{eq}^e) \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \varepsilon}$$

Il faut donc calculer $\frac{\partial x}{\partial \Delta \varepsilon}$. Pour cela, on dérive implicitement l'équation scalaire par rapport à $\Delta \varepsilon$.

Pour simplifier, on omettra par la suite dans l'écriture de g et de ses dérivées le paramètre T .

On a alors :

$$\left[3\mu \Delta t G'(x) + 1 \right] \frac{\partial x}{\partial \Delta \varepsilon} + \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \varepsilon}$$

D'où :

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu \Delta t G'(x)} \frac{\partial \sigma_{eq}^e}{\partial \Delta \varepsilon}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu \Delta t G'(x)} \frac{3\mu}{\sigma_{eq}^e} \tilde{\sigma}^e$$

avec l'expression de $G'(x)$ obtenue au [§4.3].

On obtient finalement l'expression suivante de l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = K \mathbf{I}_3^t \mathbf{I}_3 + 2\mu \left[\gamma \tilde{\sigma}^{et} \tilde{\sigma}^e + b(x, \sigma_{eq}^e) \mathbf{A} \right]$$

avec

$$A = \frac{\partial \Delta \tilde{\varepsilon}}{\partial \Delta \varepsilon} = \mathbf{J}_6 - \frac{1}{3} \mathbf{I}_3^t \mathbf{I}_3 \quad \text{où } \mathbf{J}_6 \text{ est la matrice identité de rang 6.}$$

$$\gamma = \frac{3}{2(\sigma_{eq}^e)^3} \left[\sigma_{eq}^e \frac{1 - \Delta t \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{1 + 3\mu \Delta t G'(x)} - x \right]$$

Remarque :

Dans le cas de la loi `VISC_IRRA_LOG`, on vérifie facilement que :

$$G'(x) = \frac{1}{f_1' g_1 + f_2' g_2} [g_1 g_1' (f_1'^2 - f_1 f_1'') + g_2 g_2' (f_2'^2 - f_2 f_2'') + g_1 g_2' (f_1' f_2' - f_1'' f_2)]$$

$$+ g_2 g_1' (f_1' f_2' - f_1 f_2'') - \frac{1}{3m} (f_1'' g_1 + f_2'' g_2)]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, y, T) = \frac{f_1'' g_1 + f_2'' g_2}{f_1' g_1 + f_2' g_2}$$

où $f_1, f_1', f_1'', f_2, f_2', f_2''$ désignent les valeurs de f_1 et f_2 et de leurs dérivées au point $t(x, y, T)$ et où g_1, g_1', g_2, g_2' désignent les valeurs de g_1 et g_2 et de leur dérivée par rapport à σ au point (x, T) (voir [bib1]).

6 Bibliographie

- 1) de BONNIERES P. : Ecriture sous forme standard généralisée des lois de comportement viscoplastiques du Zircaloy, note EDF-DER HI-71/7940-Indice A, 1992
- 2) de BONNIERES P., ZIDI M. : Introduction de la viscoplasticité dans le module de thermomécanique de Cyrano3 : principe, description et validation, note EDF-DER HI-71/8334, 1993.
- 3) MONERIE Y., GATT J.M. Overall viscoplastic behavior of non irradiated porous nuclear ceramics, Submitted to Mechanics of Materials (2004).

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
7.4	P. de BONNIERES	Texte initial
8.4	S. LECLERCQ, R.MASSON	Lois GATT-MONERIE et LEMA_SEUIL
9.3	P. de BONNIERES	Suppression ZIRC_CYRA2, ZIRC_EPRI.