

---

## Relations de comportement des éléments discrets

---

### Résumé :

Ce document décrit les comportements non linéaires des éléments discrets qui sont appelés par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires `STAT_NON_LINE` ou `DYNA_NON_LINE`.

Plus précisément, les comportements décrits dans ce document sont :

- le comportement de type Von-Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, accessible par les mots clés `DIS_GOUJ2E_PLAS` et `DIS_GOUJ2E_ELAS` du mot-clé `COMPORTEMENT`,
- le comportement de type contact avec choc et frottement de Coulomb, accessible par le mot-clé `DIS_CHOC` du mot-clé `COMPORTEMENT`,
- le comportement de type Von-Mises à écrouissage cinématique non linéaire, accessible par le mot-clé `DIS_ECRO_CINE`,
- le comportement rhéologique viscoélastique non linéaire, accessible par le mot-clé `DIS_VISC`,
- le comportement élastique bi-linéaire, accessible par le mot clé `DIS_BILI_ELAS`,
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, utilisé pour modéliser le comportement en translation et rotation de l'ensemble des ressorts de liaison grille-crayon des assemblages combustibles, accessible par le mot clé `DIS_GRICRA`.

L'intégration des modèles de comportement mentionnés ci-dessus est détaillée dans ce document. D'autres comportements relatifs aux éléments discrets sont disponibles, mais non détaillés ici :

- Armement des lignes (Relation `ARME`) [R5.03.31],
- Assemblage non linéaire de cornières de pylônes (Relation `ASSE_CORN`) [R5.03.32].

## Table des Matières

1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets.....	3
1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets).....	3
1.2 Calcul des déformations (petites déformations).....	4
1.3 Calcul des efforts et des forces nodales.....	4
1.4 Notations générales.....	5
2 Relation de comportement des assemblages filetés.....	6
2.1 Équations du modèle DIS_GOUJ2E_PLAS.....	6
2.2 Intégration de la relation DIS_GOUJ2E_PLAS.....	6
2.3 Variables internes.....	7
3 Comportement élastique bi-linéaire : DIS_BILI_ELAS.....	8
3.1 Définition.....	8
3.2 Variables internes.....	8
4 Comportement DIS_ECRO_CINE.....	9
4.1 Définition.....	9
4.2 Intégration du comportement.....	9
4.3 Variables internes.....	10
5 Comportement viscoélastique non linéaire DIS_VISC.....	12
5.1 Définition.....	12
5.2 Formulation du comportement.....	13
5.3 Mise en données.....	14
5.4 Intégration du comportement.....	15
5.5 Variables internes.....	16
6 Modélisation des chocs et du frottement : DIS_CHOC.....	17
6.1 Relation de contact unilatéral.....	17
6.2 Loi de frottement de Coulomb.....	18
6.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation.....	19
6.4 Définition des paramètres de contact.....	21
7 Modélisation de la liaison grille-crayon : DIS_GRICRA.....	22
7.1 Présentation générale.....	22
7.2 Définition du repère local.....	23
7.3 Comportement en translation.....	24
7.4 Comportement en rotation.....	25
7.5 Remarque.....	27
7.6 Utilisation.....	28
8 Bibliographie.....	30
9 Historique des versions du document.....	30

## 1 Principes généraux des relations de comportement des éléments discrets

---

### 1.1 Relations de comportement non linéaires (des éléments discrets)

Les relations disponibles dans *Code\_Aster* pour les éléments discrets sont des relations de comportement incrémentales données sous le mot-clé facteur `COMPORTEMENT` par le mot-clé `RELATION` dans les opérateurs non linéaires `STAT_NON_LINE` et `DYNA_NON_LINE`. On distingue :

- le comportement de type Von-Mises à écrouissage isotrope utilisé pour la modélisation des assemblages filetés, mis en œuvre dans `MACR_GOUJ2E_CALC` et accessible par les mots clés `DIS_GOUJ2E_PLAS` et `DIS_GOUJ2E_ELAS`,
- le comportement de type contact avec choc et frottement de Coulomb, accessible par le mot-clé `DIS_CHOC`,
- le comportement de type Von Mises à écrouissage cinématique non linéaire, accessible par le mot clé `DIS_ECRO_CINE` ,
- le comportement viscoélastique linéaire, accessible par le mot clé `DIS_VISC` ,
- le comportement élastique bilinéaire, accessible par le mot clé `DIS_BILI_ELAS` ,
- le comportement de type contact unilatéral avec frottement de Coulomb, utilisé pour modéliser le comportement en translation et rotation de l'ensemble des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles, accessible par le mot clé `DIS_GRICRA`,

Et les comportements suivants, qui ne sont pas détaillés ici :

- Armement des lignes (relation `ARME`) [R5.03.31],
- Assemblage non linéaire de cornières de pylônes (relation `ASSE_CORN`) [R5.03.32],

Les paramètres nécessaires à ces relations sont fournis dans l'opérateur `DEFI_MATERIAU` par les mots clés :

Comportement dans STAT_NON_LINE DYNA_NON_LINE	Type d'élément (modélisation) dans AFFE_MODELE	Mots clé dans DEFI_MATERIAU	AFFE_CARA_ELEM mots clé sous DISCRET
DIS_GOUJ2E_ELAS DIS_GOUJ2E_PLAS	2D_DIS_T : élément discret 2D à deux nœuds en translation	TRACTION	CARA : 'K_T_D_L'
DIS_ECRO_CINE	DIS_T, D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_ECRO_CINE	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_VISC	DIS_T, 2D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_VISC	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_BILI_ELAS	DIS_T, 2D_DIS_T, DIS_TR, 2D_DIS_TR : éléments discrets 2D ou 3D à un ou deux nœuds en translation / rotation	DIS_BILI_ELAS	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_TR_D_L' CARA : 'K_T_D_N' CARA : 'K_TR_D_N'
DIS_CHOC et choc frottement Coulomb	contact avec de DIS_T, 2D_DIS_T : éléments discrets 2D ou 3D à deux nœuds en translation	DIS_CONTACT	CARA : 'K_T_D_L' CARA : 'K_T_D_N' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres
DIS_GRICRA	DIS_TR : éléments discrets 3D à deux nœuds en translation / rotation	DIS_GRICRA	CARA : 'K_TR_L' Pour le calcul de rigidité élastique et de modes propres

Contrairement aux modèles de comportement 1D [bib3], ces relations lient directement les efforts et les déplacements, au lieu d'être formulées entre contraintes et déformations. Elles ne sont valables qu'en petites déformations. On décrit pour chaque relation de comportement le calcul du champ d'efforts à partir d'un incrément de déplacement donné (cf. algorithme de Newton [R5.03.01]), le calcul des forces **nodales**  $R$  et de la matrice tangente.

## 1.2 Calcul des déformations (petites déformations)

Pour chacun des éléments finis du *Code\_Aster*, dans STAT\_NON\_LINE, l'algorithme global (Newton) fournit à la routine élémentaire, qui intègre le comportement, un accroissement du champ de déplacement [R5.03.01]

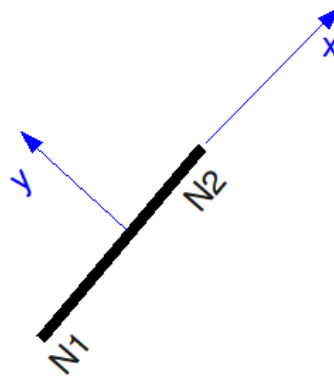
Pour les éléments discrets à 2 nœuds, on en déduit l'accroissement d'élongation (en translation) ou de rotation, entre les nœuds 1 et 2 de l'élément :  $\Delta \varepsilon = \Delta u_2 - \Delta u_1$ .

Pour les éléments discrets à un nœud, on obtient simplement :  $\Delta \varepsilon = \Delta u_1$

## 1.3 Calcul des efforts et des forces nodales

Après intégration du comportement, il faut fournir à l'algorithme global (Newton) un vecteur contenant les efforts généralisés, d'une part, et d'autre part un vecteur contenant les forces nodales  $R$  [R5.03.01] en repère global  $(X, Y, Z)$ .

Pour les éléments discrets, la résolution du problème local non linéaire fournit directement les efforts dans l'élément (uniformes dans l'élément), en repère local  $(x, y, z)$ , qui sont de la forme :



$$F = \begin{pmatrix} F_1(\text{noeud 1}) \\ F_2(\text{noeud 2}) \end{pmatrix} \text{ avec} \quad \begin{array}{l} \text{en 2D : } F_1 = F_2 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \\ \text{en 3D : } F_1 = F_2 = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ en translation seule,} \end{array}$$

$$F_1 = F_2 = (F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z) \text{ en translation et rotation.}$$

Le vecteur  $R$  des forces nodales équivalentes (qui est exprimé dans le repère global) est déduit de  $F$  par changement de repère :

$$R = P^T R_{loc} P \quad \text{avec} \quad R_{loc} = \begin{pmatrix} -F_1(\text{noeud 1}) \\ F_2(\text{noeud 2}) \end{pmatrix}$$

où  $P$  est la matrice de changement de repère, permettant le passage du repère global vers le repère local, comme pour les éléments de poutre [R3.08.01].

## 1.4 Notations générales

Toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par  $^-$ .

Les quantités évaluées à l'instant  $t + \Delta t$  ne sont pas indicées.

Les incréments sont désignés par  $\Delta$ . On a ainsi :

$$Q = Q(t + \Delta t) = Q^-(t) + \Delta Q(t) = Q^- + \Delta Q$$

## 2 Relation de comportement des assemblages filetés

### 2.1 Équations du modèle DIS\_GOUJ2E\_PLAS

Elles sont déduites du comportement 3D VMIS\_ISOT\_TRAC [R5.03.02] : on y représente une relation de comportement de type élastoplastique à écrouissage isotrope, liant les efforts dans l'élément discret à la différence de déplacement des deux nœuds dans la direction  $y$  locale.

Dans la direction  $x$  locale, le comportement est élastique, linéaire, et le coefficient reliant l'effort  $F_x$  au déplacement  $D_x$  est la raideur  $K_x$  fournie par l'intermédiaire de AFFE\_CARA\_ELEM.

Le comportement non linéaire ne concerne que la direction  $y$  locale.

En notant  $\Delta \varepsilon = \Delta u_y^1 - \Delta u_y^2$  et  $\sigma = F_y^1 = F_y^2$

Les relations s'écrivent sous la même forme que les relations de Von-Mises 1D [R5.03.09] :

$$\begin{aligned} \dot{e}^p &= \dot{p} \frac{s}{|s|} \\ s &= E(e - e^p) \\ s_{eq} - R(p) &= |s| - R(p) \leq 0 \\ s_{eq} - R(p) < 0 &\Rightarrow \dot{p} = 0 \\ s_{eq} - R(p) = 0 &\Rightarrow \dot{p} \geq 0 \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $p$  représente un "déplacement plastique cumulé", et la fonction d'écrouissage isotrope  $R(p)$  est affine par morceaux, donnée sous forme d'une courbe effort - déplacement définie point par point, fournie sous le mot clé facteur TRACTION de l'opérateur DEFI\_MATERIAU [U4.43.01].

Le premier point correspond à la fin du domaine linéaire, et sert donc à définir à la fois la limite de linéarité (analogue à la limite d'élasticité), et  $E$  qui est la pente de cette partie linéaire ( $E$  est indépendant de la température). La fonction  $R(p)$  est déduite d'une courbe caractéristique de l'assemblage (modélisation de quelques filets) exprimant l'effort sur le goujon en fonction de la différence de déplacement moyen entre le goujon et la bride [bib1] :  $F = f(u - v)$ .

### 2.2 Intégration de la relation DIS\_GOUJ2E\_PLAS

Par discrétisation implicite directe des relations de comportement, de façon analogue à l'intégration 1D [R5.03.09] on obtient :

$$\begin{aligned} E \Delta \varepsilon - \Delta \sigma &= E \Delta p \frac{\sigma^- + \Delta \sigma}{|\sigma^- + \Delta \sigma|} \\ |\sigma^- + \Delta \sigma| - R(p^- + \Delta p) &\leq 0 \\ |\sigma^- + \Delta \sigma| - R(p^- + \Delta p) < 0 &\Rightarrow \Delta p = 0 \\ |\sigma^- + \Delta \sigma| - R(p^- + \Delta p) = 0 &\Rightarrow \Delta p \geq 0 \end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

- $|\sigma^- + \Delta \sigma| < R(p^- + \Delta p)$  alors  $\Delta p = 0$  soit  $\Delta \sigma = E \Delta \varepsilon$  donc  $|\sigma^- + E \Delta \varepsilon| < R(p^-)$
- $|\sigma^- + \Delta \sigma| = R(p^- + \Delta p)$  alors  $\Delta p \geq 0$  donc  $|\sigma^- + E \Delta \varepsilon| \geq R(p^-)$

On en déduit l'algorithme de résolution :

posons  $\sigma^e = \sigma^- + E \Delta \varepsilon$

si  $|\sigma^e| \leq R(p^-)$  alors  $\Delta p = 0$  et  $\Delta \sigma = E \Delta \varepsilon$

si  $|\sigma^e| > R(p^-)$  alors il faut résoudre :

$$\sigma^e = \sigma^- + \Delta \sigma + E \Delta p \frac{\sigma^- + \Delta \sigma}{|\sigma^- + \Delta \sigma|}$$

$$\sigma^e = (\sigma^- + \Delta \sigma) \left( 1 + \frac{E \Delta p}{|\sigma^- + \Delta \sigma|} \right)$$

donc en prenant la valeur absolue :

$$|\sigma^e| = |\sigma^- + \Delta \sigma| \left( 1 + \frac{E \Delta p}{|\sigma^- + \Delta \sigma|} \right)$$

soit, en utilisant  $|\sigma^- + \Delta \sigma| = R(p^- + \Delta p)$   
 $|\sigma^e| = R(p^- + \Delta p) + E \Delta p$

En tenant compte de la linéarité par morceaux de  $R(p)$ , on peut résoudre explicitement cette équation pour trouver  $\Delta p$

On en déduit :  $\frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} = \frac{\sigma}{R(p^- + \Delta p)}$

alors :  $\sigma = \sigma^- + \Delta \sigma = \frac{\sigma^e}{|\sigma^e|} R(p) = \frac{\sigma^e}{1 + \frac{E \Delta p}{R(p)}}$

De plus, l'option `FULL_MECA` permet de calculer la matrice tangente  $\mathbf{K}_i^n$  à chaque itération. L'opérateur tangent qui sert à la construire est calculé directement sur le système discrétisé précédent. On obtient directement :

- Si  $|\sigma^e| > R(p^-)$  alors  $\frac{\delta \sigma}{\delta \epsilon} = E_t = \frac{E R'(p)}{E + R'(p)}$
- sinon  $\frac{\delta \sigma}{\delta \epsilon} = E$

## 2.3 Variables internes

La relation de comportement `DIS_GOUJ2E_PLAS` produit deux variables internes : le « déplacement plastique cumulé »  $p$ , et un indicateur valant 1 si l'accroissement de déformation plastique est non nul et 0 dans le cas contraire.

### 3 Comportement élastique bi-linéaire : DIS\_BILI\_ELAS

#### 3.1 Définition

Le comportement DIS\_BILI\_ELAS est utilisé pour modéliser un comportement élastique bilinéaire en translation, dans chaque direction. La loi de comportement a été conçue pour être utilisée avec tous les éléments discrets. Le comportement est caractérisé par 2 pentes ( $K_{DEB}$  et  $K_{FIN}$ ) et par effort ( $FPRE$ ) qui définit la rupture de pente.

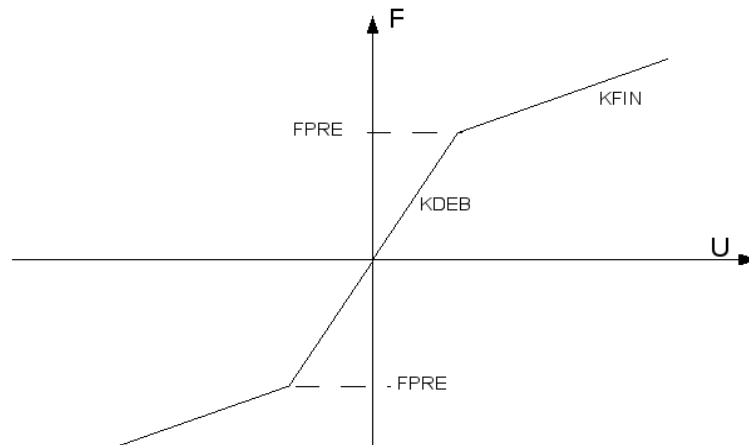


Figure 3.1-a : Comportement élastique bilinéaire

Pour cette loi et cela quel que soit le degré de liberté considéré, le comportement du discret est soit élastique soit élastique-bilinéaire. Si dans une des directions le comportement bilinéaire n'est pas défini, le comportement dans cette direction est alors élastique et ce sont les valeurs données dans la commande AFFE\_CARA\_ELEM qui sont prises. La loi DIS\_BILI\_ELAS ne concerne que les degrés de translation, cela implique donc que le comportement est élastique pour les degrés de liberté de rotation qui existent pour ce discret. Ce repère local est défini de façon classique dans la commande AFFE\_CARA\_ELEM sous le mot clef facteur ORIENTATION.

Les 3 caractéristiques ( $K_{DEB}$ ,  $K_{FIN}$ ,  $FPRE$ ) sont obligatoirement données dans le repère local de l'élément, il est donc nécessaire dans la commande AFFE\_CARA\_ELEM sous le mot clef facteur DISCRET de préciser REPERE='LOCAL'. Une erreur fatale est émise par Code\_Aster si cette condition n'est pas respectée.

Les grandeurs  $K_{DEB}$  et  $K_{FIN}$  sont des fonctions qui dépendent de la température et peuvent être définies sous forme de fonction, de nappe ou de formule.

Les équations incrémentales de la loi de comportement sont simplement :

$$\text{Si } |F| \leq FPRE \Rightarrow dF = K_{DEB} \cdot dU \quad \text{Sinon } dF = K_{FIN} \cdot dU$$

$F$  étant l'effort à l'instant  $t$  considéré dans une des directions de translation, et  $dU$  l'incrément de déplacement de translation dans cette direction.

#### 3.2 Variables internes

Il y a une variable interne par degré de liberté de translation. Elle peut prendre 3 valeurs :

- $VI=0$ , le discret n'a jamais été sollicité dans cette direction.
- $VI=1$ , on est dans le cas où  $|F| \leq FPRE$
- $VI=2$ , on est dans le cas où  $|F| > FPRE$



## 4 Comportement DIS\_ECRO\_CINE

### 4.1 Définition

Le comportement DIS\_ECRO\_CINE est une loi de comportement élastoplastique à écrouissage cinématique non linéaire pour éléments discrets. Cette loi est définie pour chaque composante du tenseur des efforts résultants. Les coefficients matériau sont fournis sous le mot-clé DIS\_ECRO\_CINE. Par exemple pour la direction  $X$  :

- LIMY\_DX :  $F_e$  Effort limite élastique suivant l'axe local  $x$  de l'élément
- KCIN\_DX :  $k_r$  Raideur suivant l'axe local  $Rx$  de l'élément
- PUIS\_DX :  $n$  Coefficient de non-linéarité suivant l'axe local  $x$  de l'élément (supérieur à 1)
- LIMU\_DX :  $F_u$  Effort limite suivant l'axe local  $x$  de l'élément.
  - Seuil :  $f = |F - X| - F_e$
  - Si  $f \leq 0$  le comportement est élastique :  $\dot{F} = K_e \cdot \dot{U}$
  - Sinon :

$$f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0$$

$$\dot{U}^{an} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial F} \quad -\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial X} \quad \text{[éq 4.1-1]}$$

$$\dot{F} = K_e (\dot{U} - \dot{U}^{an}) \quad \text{[éq 4.1-2]}$$

$$X = \frac{k_r \cdot \alpha}{\left(1 + \left(\frac{k_r \cdot \alpha}{F_u}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{[éq 4.1-3]}$$

### 4.2 Intégration du comportement

La résolution est obtenue après discrétisation en temps de la façon suivante :

$\Delta F = K_e (\Delta U - \Delta U^{an})$  où  $\Delta F, \Delta U$  peuvent représenter soit des efforts et des translations, soit des moments et des rotations.

En calculant :  $F^- = K_e (U^- - U_{an}^-)$ , on effectue un essai élastique :

Si  $|F^- + K_e (\Delta U) - X^-| \leq 0$  alors  $\Delta F = K_e \cdot \Delta U$

Sinon, le système à résoudre est :

$$f = 0 \Rightarrow |F^- + \Delta F - X^- - \Delta X| = F_e$$

$$\Delta U^{an} = \Delta \alpha = \Delta \lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e} \quad \text{[éq 4.2-1]}$$

$$\Delta F = K_e (\Delta U - \Delta U^{an})$$

Les 3 inconnues sont :  $\Delta F; \Delta U^{an} = \Delta \alpha; \Delta \lambda$  car  $\Delta X = \frac{k(\alpha^- + \Delta \alpha)}{\left(1 + (k(\alpha^- + \Delta \alpha))^n\right)^{1/n}} - X^-$  est une fonction analytique de  $\Delta \alpha$ .

On peut simplifier ce système de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |F^- + \Delta F - X^- - \Delta X| &= F_e \\ \Delta U^{an} &= \Delta \lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e} \\ \Delta F + F^- - X^- - \Delta X &= K_e (\Delta U - \Delta U^{an}) + F^- - X^- - \Delta X \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} |F^- + \Delta F - X^- - \Delta X| &= F_e \\ \Delta U^{an} &= \Delta \lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e} \end{aligned} \quad [\text{éq 4.2-2}]$$

$$\Delta F + F^- - X^- - \Delta X = K_e \Delta U + F^- - X^- - \Delta X - K_e \Delta \lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e}$$

La dernière équation fournit :

$$\begin{aligned} (\Delta F + F^- - X^- - \Delta X) \left(1 + K_e \Delta \frac{\lambda}{F_e}\right) &= K_e \Delta U + F^- - X^- - \Delta X \text{ où } \Delta X \text{ fonction de } \Delta \alpha \text{ donc de} \\ \Delta \lambda \text{ ( et du signe de } F^- - X^- \text{). En prenant la norme à droite et à gauche on obtient :} \\ F_e + K_e \Delta \lambda &= |K_e \Delta U + F^- - X^- - \Delta X| \end{aligned}$$

Cette unique équation scalaire peut être résolue par une méthode classique de recherche de zéro de fonction (Newton, sécante , etc... voir par exemple [R5.03.04]). Dans le cas où l'écroissage cinématique est linéaire, (seul cas justifié thermodynamiquement [bib 8]) on obtient analytiquement la solution  $\Delta \lambda$  :

$$F_e + (K_e + k) \Delta \lambda = |K_e \Delta U + F^- - X^-|$$

On calcule ensuite les autres inconnues par :

$$\Delta F = \frac{K_e \Delta U + F^- - X^- - \Delta X}{\left(1 + K_e \frac{\Delta \lambda}{F_e}\right)} - F^- + X^- + \Delta X \text{ et } \Delta U^{an} = \Delta \lambda \frac{F^- + \Delta F - X^- - \Delta X}{F_e}$$

La programmation actuelle résout le système de façon simplifiée :

$$f = |F^- - X^-| - F_e \text{ est discrétisé de façon explicite : } f = |F^- - X^-| - F_e$$

alors :  $F_e + K_e \Delta \lambda = |K_e \Delta U + F^- - X^-|$  .

On calcule ensuite  $\alpha = \alpha^- + \Delta U^{an}$  , ce qui permet d'actualiser :

$$X = \frac{k_r \alpha}{\left(1 + \left(\frac{k_r \alpha}{F_u}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}$$

La raideur tangente dans cette direction est approchée par :

$$K_{igt} = \frac{\Delta F}{\Delta U} \quad [\text{éq 4.2-3}]$$

## 4.3 Variables internes

Il y a 3 variables internes par degré de liberté :

- $V1$  contient  $U^{an}$  à chaque instant
- $V2$  contient  $\alpha$  à chaque instant
- $V3$  contient l'énergie totale réactualisée à chaque instant.



## 5 Comportement viscoélastique non linéaire DIS\_VISC

### 5.1 Définition

Le comportement DIS\_VISC est un comportement rhéologique viscoélastique non linéaire, de type Zener étendu, permettant de schématiser le comportement d'un amortisseur uniaxial, applicable au degré de liberté  $DX$  local des éléments discrets à deux nœuds (maille SEG2) ou et des éléments discrets à un nœud (maille POI1), dans le cas d'une liaison avec un bâti fixe non maillé (voir des exemples statiques et dynamiques dans le cas test SSND101). L'agencement des composants élastiques linéaires permet de prendre en compte une large gamme de situations d'environnement de la partie amortissante de l'appareil et de ses fixations.

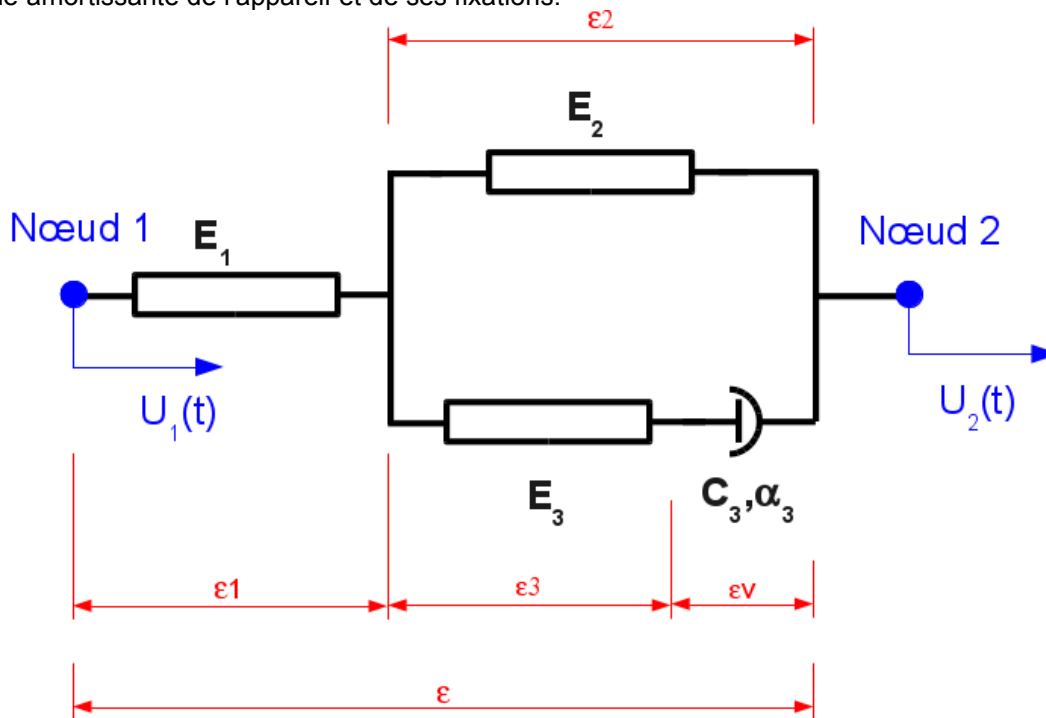


Figure 5.1-a : Modèle rhéologique viscoélastique non linéaire discret.

La loi visqueuse non linéaire s'écrit, pour  $\alpha \in ]0, 1]$  :

$$\sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 = C \cdot \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_v) \cdot |\dot{\varepsilon}_v|^\alpha \quad [\text{éq 5.1-1}]$$

la constante d'amortissement  $C$  étant positive. Pour  $\alpha = 1$ , le modèle est visqueux linéaire. On note que la dimension « temps » de ce problème est, par les règles de similitude, directement associée au coefficient  $C$  : en effet, en notant le temps réduit par  $\tau = \lambda t$ , la loi non linéaire s'écrit :

$$\sigma_3 = C \cdot \lambda^\alpha \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_v) \cdot \left| \frac{d\varepsilon_v}{d\tau} \right|^\alpha. \text{ Ainsi envisager un chargement dynamique avec une pulsation}$$

différente (en rapport  $\lambda$ ) est identique à changer en proportion de  $\lambda^\alpha$  le coefficient  $C$  de la loi. On note que le cas  $E_2 \rightarrow \infty$  est non-admissible, mais on peut choisir  $E_2 = 0$  (système en série pure, type MAXWELL) ; de même on ne prendra pas  $E_1 \rightarrow \infty$  et  $E_3 \rightarrow \infty$  en même temps (modèle de KELVIN-VOIGT), faute de quoi la raideur initiale du système serait infinie.

## 5.2 Formulation du comportement

On note ci-après par  $\varepsilon$  la « déformation » de l'élément discret, à savoir la différence des déplacements axiaux (direction  $x$  dans le repère local) des nœuds aux extrémités de l'élément défini :

$$\varepsilon = U_x^{N2} - U_x^{N1} \text{ sur la maille SEG2 ou } \varepsilon = U_x^{N1} \text{ sur la maille POI1} \quad [\text{éq 5.2-1}]$$

De même, on note ci-après par  $\sigma$  la « contrainte » de l'élément discret, à savoir l'effort axial transisant dans l'élément défini sur la maille SEG2 ou POI1 :

$$\sigma = F_x^{N2} = F_x^{N1} \quad [\text{éq 5.2-2}]$$

La compatibilité des déformations donne, cf. Figure 5.1-a :

$$\begin{cases} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_v \end{cases} \quad [\text{éq 5.2-3}]$$

L'équilibre et les relations de comportement donnent respectivement (en se plaçant ci-après dans le cas  $\text{sgn}(\dot{\varepsilon}_v) = +1$ , pour  $\varepsilon$  et  $\sigma$  positifs) :

$$\begin{cases} \sigma &= E_1 \varepsilon_1 \\ \sigma &= \sigma_2 + \sigma_3 = E_2 \varepsilon_2 + E_3 \varepsilon_3 \\ \sigma_3 &= E_3 \varepsilon_3 = C (\dot{\varepsilon}_v)^\alpha \end{cases} \quad [\text{éq 5.2-4}]$$

On déduit respectivement que :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \left( \frac{\sigma_3}{C} \right)^{1/\alpha} + \frac{\dot{\sigma}_3}{E_3} \quad [\text{éq 5.2-5}]$$

$$\dot{\sigma} = E_2 \cdot \left( \frac{\sigma_3}{C} \right)^{1/\alpha} + \frac{\dot{\sigma}_3 (E_2 + E_3)}{E_3} \quad [\text{éq 5.2-6}]$$

Et l'évolution de la déformation est :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{E_1 + E_2}{E_1} \left( \frac{\sigma_3}{C} \right)^{1/\alpha} + \frac{\dot{\sigma}_3 (E_1 + E_2 + E_3)}{E_1 E_3} \quad [\text{éq 5.2-7}]$$

Donc la loi de comportement globale du système rhéologique s'écrit en vitesse :

$$\dot{\sigma} = \frac{E_1 (E_2 + E_3) \dot{\varepsilon} - E_1 E_3 \cdot \dot{\varepsilon}_v}{E_1 + E_2 + E_3} \quad [\text{éq 5.2-8}]$$

La vitesse  $\dot{\varepsilon}$  est calculée sur la base des déplacements et l'incrément de temps choisi :

$$\dot{\varepsilon} = (U_x^{N2} - U_x^{N1}) / \Delta t .$$

Il reste à exprimer  $\dot{\varepsilon}_v$  à partir des variables d'état :

$$\dot{\varepsilon}_v = \left( \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma (E_1 + E_2)}{E_1} - E_2 \varepsilon \right) \right)^{1/\alpha} \quad [\text{éq 5.2-9}]$$

La raideur tangente élastique en vitesse du modèle, qui sert à la phase de prédiction, est :

$$K_t = \frac{E_1 \cdot (E_2 + E_3)}{E_1 + E_2 + E_3} = \frac{1 + E_2/E_3}{1/E_1 + E_2/(E_1 \times E_3) + 1/E_3} \quad [\text{éq 5.2-10}]$$

La puissance dissipée s'exprime par :

$$P_{diss} = C |\dot{\epsilon}_v|^{1+\alpha} \quad [\text{éq 5.2-11}]$$

Dans le plan vitesse de déformation-contrainte dans le modèle rhéologique, pour différentes valeurs de  $\alpha$ , on observe les cycles suivants :

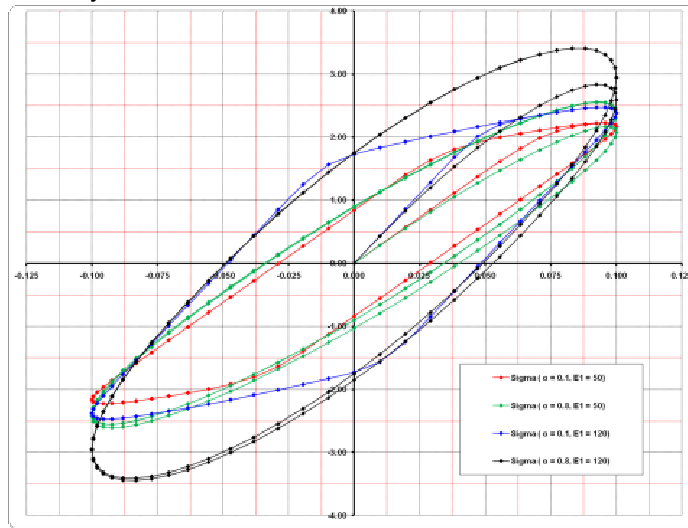


Figure 5.2-a : Cycles de réponse du modèle rhéologique viscoélastique non linéaire discret (modèle Zener généralisé). Force en Newton fonction du déplacement en mètres.

**Remarque :**

L'inclinaison des cycles provient de l'effet des raideurs en parallèle dans le comportement rhéologique (Kelvin-Voigt ou Zener) ou en série (modèle Maxwell). En effet, dans le cas d'un amortisseur seul sans raideur, les cycles sont nécessairement symétriques par rapport à l'axe des déplacements nuls. Si l'on dispose de courbes expérimentales de comportement d'un tel appareil amortisseur, on pourra par recalage déterminer ainsi les divers coefficients de cette loi DIS\_VISC.

## 5.3 Mise en données

Les coefficients matériau sont fournis par le mot-clé DIS\_VISC de la commande DEFI\_MATERIAU. Pour la direction locale  $x$  (et seulement celle-là) de l'élément discret, on fournit 5 coefficients, soit les raideurs, soit les souplesses, puis les caractéristiques amortissantes :

- K1 : raideur élastique  $E_1$  de l'élément 1 du modèle rhéologique, cf. Figure 5.1-a ,
- K2 : raideur élastique  $E_2$  de l'élément 2 du modèle rhéologique,
- K3 : raideur élastique  $E_3$  de l'élément 3 du modèle rhéologique,
- UNSUR\_K1 : souplesse élastique  $1/E_1$  de l'élément 1 du modèle rhéologique,
- UNSUR\_K2 : souplesse élastique  $1/E_2$  de l'élément 2 du modèle rhéologique,
- UNSUR\_K3 : souplesse élastique  $1/E_3$  de l'élément 3 du modèle rhéologique,
- PUIS\_ALPHA : puissance  $\alpha$  de la loi non linéaire du comportement visqueux de l'élément,

- $C$  : coefficient du comportement visqueux de l'élément.

Les conditions à respecter pour ces coefficients sont (notamment pour assurer la positivité et la finitude de la matrice tangente) :

$$E_1 \geq 10^{-8} ; 1/E_1 \geq 0 ; E_3 \geq 10^{-8} ; 1/E_3 \geq 0$$

$$1/E_2 \geq 10^{-8} ; E_2 \geq 0 ; C \geq 10^{-8} ; 10^{-8} \leq \alpha \leq 1$$

De plus, on ne peut avoir à la fois :  $1/E_1=0$ ,  $1/E_3=0$  et  $E_2=0$ , c'est-à-dire le cas de l'amortisseur seul.

## 5.4 Intégration du comportement

### 5.4.1 Intégration locale

Un schéma d'EULER implicite est bien moins précis (il faudrait calculer l'erreur à l'ordre 2) qu'un schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5 avec un contrôle de l'erreur. Le schéma RK5 est une combinaison du schéma d'ordre 4 et du schéma d'ordre 6 (bib [9]), pour lequel les coefficients sont déterminés de façon à minimiser l'erreur entre l'ordre 4 et l'ordre 6.

C'est pourquoi dans Code\_Aster, l'intégration locale de ce modèle utilise le schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 5. De plus, la raideur tangente après discrétisation discrète en temps du comportement  $dF/dU$  est obtenue directement via l'expression du schéma RUNGE-KUTTA, à la fin du pas de temps.

L'erreur est connue, il est donc possible de déclencher des subdivisions locales du pas de temps si le critère de convergence n'est pas respecté.

### 5.4.2 Intégration temporelle et équilibre global

Par ailleurs, si on envisage l'équilibre dynamique d'un système à un degré de liberté, de masse  $M$ , comportant un amortisseur seul (sans raideurs) obéissant à la loi [éq 5.1-1], l'équation du mouvement s'écrit, ayant adopté le « temps réduit »  $\tau = \lambda t$  :

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + C \cdot \lambda^{2-\alpha} \cdot \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^\alpha = 0 \quad [\text{éq 5.4.2-1}]$$

Adoptons par exemple le schéma d'intégration temporelle de Newmark, cf. [R5.05.05], section § 3.1 ; on note à l'instant  $\tau_i$  les grandeurs déplacement, vitesse et accélération :  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $a_i$  et  $\Delta \tau$  le pas de « temps réduit ». On a donc à l'instant  $\tau_{i+1}$  :

$$\begin{cases} v_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta \tau} (u_{i+1} - u_i) + \frac{\beta - \gamma}{\beta} v_i + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \Delta \tau \cdot a_i \\ a_{i+1} = \frac{1}{\beta \Delta \tau^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta \Delta \tau} v_i + \frac{2\beta - 1}{2\beta} \cdot a_i \end{cases} \quad [\text{éq 5.4.2-2}]$$

Injectons ces expressions [éq 5.2-4] pour écrire l'équilibre [éq 5.4.2-1] à l'instant  $\tau_{i+1}$ , dans le cas  $v_i \geq 0$ , développé au premier ordre en  $\Delta v$  :

$$\hat{K} u_{i+1} = \frac{M u_i}{\beta \Delta \tau^2} + \frac{M v_i}{\beta \Delta \tau} - \frac{2\beta - 1}{2\beta} \cdot M a_i + C \cdot \lambda^{2-\alpha} \cdot \left( \frac{\beta - \gamma}{\beta} v_i + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \Delta \tau \cdot a_i \right)^{1-\alpha} \quad [\text{éq 5.4.2-3}]$$

la matrice tangente étant :

$$\hat{K} = \frac{M}{\beta \Delta \tau^2} + \frac{\alpha \gamma C \cdot \lambda^{2-\alpha}}{\beta \Delta \tau} \cdot \left( \frac{\beta - \gamma}{\beta} v_i + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta} \Delta \tau \cdot a_i \right)^{\alpha-1} \quad [\text{éq 5.4.2-4}]$$

Dans le cas  $\alpha=1$  (amortisseur linéaire), on retrouve la matrice tangente  $\hat{K}$  et la dépendance au pas de temps  $\Delta t$  habituelles du schéma de Newmark pour le cas linéaire, cf. [R5.05.05].

Dans le cas  $\alpha \neq 1$  (amortisseur non linéaire), on observe que  $v_i$  et  $a_i$  ne pouvant être nuls ensemble (sauf en statique), la matrice tangente  $\hat{K}$  du schéma de Newmark voit sa dépendance au pas de temps affectée par le facteur  $C \cdot \lambda^{2-\alpha}$ . Donc si on fait varier le coefficient  $C$  de la loi, on devra faire varier le pas de temps d'intégration temporelle. On pourra aussi adopter une technique de subdivision du pas de temps, cf. opérateur `STAT_NON_LINE` [U4.51.03] et opérateur `DYNA_NON_LINE` [U4.53.01].

Ce modèle de comportement sur élément discret est aussi disponible à l'identique au sein des opérateurs `DYNA_VIBRA` [U4.53.03] et `DYNA_TRAN_MODAL` [U4.53.21], pour une analyse dynamique sur base modale avec non-linéarités localisées sur des nœuds, et des schémas d'intégration en temps de la dynamique de type Euler ou de type Runge-Kutta d'ordre 5 et d'ordre 3, à pas adaptatif. Il y est intégré localement en temps de la même manière : voir § 5.4.1. On devra, comme en dynamique sur base physique, définir le pas de temps du schéma en fonction des paramètres de la loi `DIS_VISC`, dont les valeurs sont définies directement dans les opérateurs `DYNA_VIBRA` et `DYNA_TRAN_MODAL`.

## 5.5 Variables internes

Le comportement `DIS_VISC` possède 4 variables internes :

- $V1$  : `FORCE` : contient l'effort  $\sigma$  à chaque instant dans le modèle rhéologique.
- $V2$  : `UVISQ` : déplacement visqueux de l'amortisseur  $\varepsilon_v$ .
- $V3$  : `DISSTHER` : contient l'énergie dissipée réactualisée à chaque instant :

$$V3 = \sum \left| \frac{\sigma^+(E_1 + E_2)}{E_1} - E_2 \varepsilon^+ \right| \cdot |\varepsilon_v^+ - \varepsilon_v^-|$$

- $V4$  : `RAIDEUR` : raideur tangente au comportement  $dF/dU$ .



## 6 Modélisation des chocs et du frottement : DIS\_CHOC

Le comportement DIS\_CHOC traduit le contact avec choc et frottement entre deux structures, via deux types de relations :

- la relation de contact unilatéral qui exprime la non inter-pénétrabilité entre les corps solides,
- la relation de frottement qui régit la variation des efforts tangentiels dans le contact. On retiendra pour les présents développements une relation simple : la loi de frottement de Coulomb.

### 6.1 Relation de contact unilatéral

Soient deux structures  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On note  $d_N^{1/2}$  la distance normale entre les structures,  $F_N^{1/2}$  la force de réaction normale de  $\Omega_1$  sur  $\Omega_2$ .

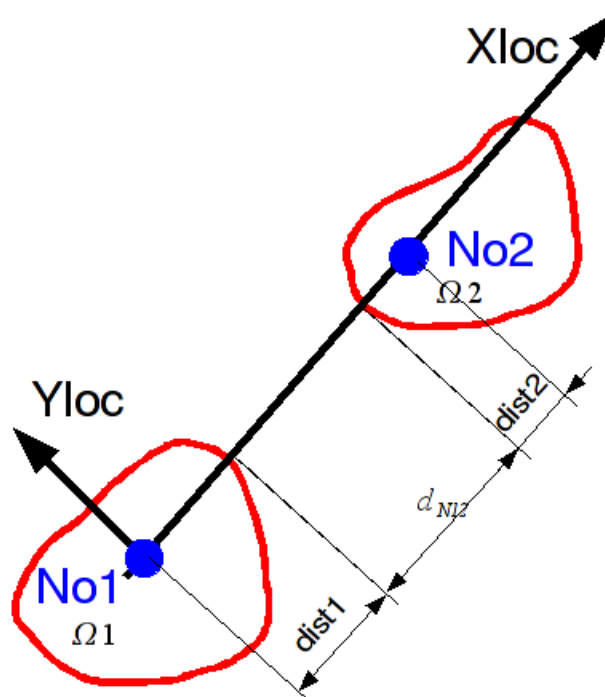


Figure 6.1-a : Définition des distances pour la relation DIS\_CHOC.

Dans le repère local à l'élément, la distance normale  $d_N$  a pour expression :

$$d_N = ((X_{loc2}^0 + u_2) - (X_{loc1}^0 + u_1)) - dist1 - dist2$$

La loi de l'action et de la réaction impose :

$$F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \quad [\text{éq 6.1-1}]$$

Les conditions de contact unilatéral, encore appelées conditions de Signorini [bib5], s'expriment de la façon suivante :

$$d_N^{1/2} \geq 0, F_N^{1/2} \geq 0, d_N^{1/2} \cdot F_N^{1/2} = 0 \text{ et } F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \quad [\text{éq 6.1-2}]$$

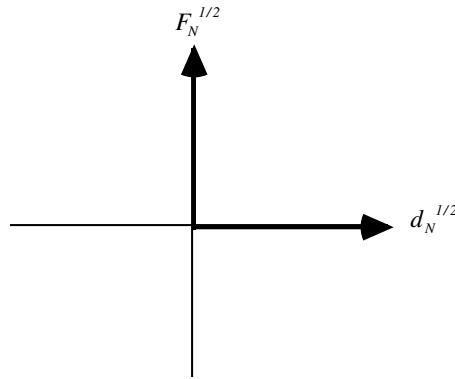


Figure 6.1-b : Graphe de la relation de contact unilatéral.

Ce graphe traduit une relation force-déplacement qui n'est pas différentiable. Il n'est donc pas utilisable de façon simple dans un algorithme de calcul dynamique.

## 6.2 Loi de frottement de Coulomb

La loi de Coulomb exprime une limitation de l'effort tangentiel  $F_T^{1/2}$  de réaction tangentielle de  $\Omega_1$  sur  $\Omega_2$ . Soit  $\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}$  la vitesse relative de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Omega_2$  en un point de contact et soit  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb, on a [bib5] :

$$s = \|\mathbf{F}_T^{1/2}\| - \mu \cdot F_{N^{1/2}} \leq 0, \quad \exists \lambda \quad \mathbf{u}_T^{i/2} = \lambda \mathbf{F}_T^{1/2}, \quad \lambda \leq 0, \quad \lambda \cdot s = 0 \quad [\text{éq 6.2-1}]$$

et la loi de l'action et de la réaction :

$$\mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad [\text{éq 6.2-2}]$$

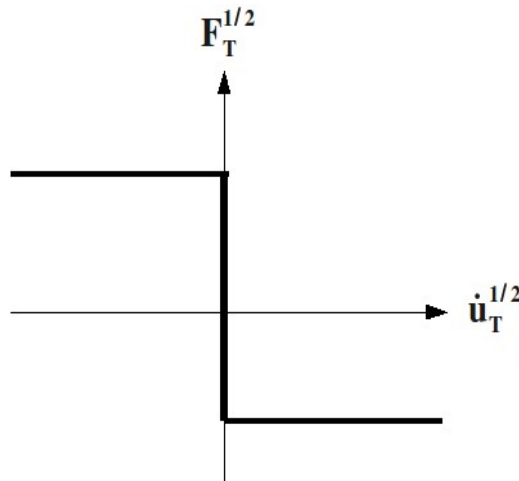


Figure 6.2-a : Graphe de la loi de frottement de Coulomb.

Le graphe de la loi de Coulomb est lui aussi non différentiable et n'est donc pas simple à utiliser dans un algorithme dynamique.

**Remarque :**

*La loi de frottement de Coulomb est écrite en vitesse. Lors d'un calcul statique (cf. §6.3.3), l'écriture sera faite en incrément de déplacement.*

## 6.3 Modélisation approchée des relations de contact par pénalisation

### 6.3.1 Modèle de force normale de contact

Le principe de la pénalisation appliqué au graphe de la [Figure 5.3.1-a] consiste à introduire une relation univoque  $F_N^{1/2} = f_\varepsilon(d_N^{1/2})$  au moyen d'un paramètre  $\varepsilon$ . Le graphe de  $f_\varepsilon$  doit tendre vers le graphe de Signorini lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro [bib6].

Une des possibilités consiste à proposer une relation linéaire entre  $d_N^{1/2}$  et  $F_N^{1/2}$  :

$$F_N^{1/2} = -\frac{1}{\varepsilon} d_N^{1/2} \text{ si } d_N^{1/2} \leq 0 ; F_N^{1/2} = 0 \text{ sinon} \quad [\text{éq 6.3.1-1}]$$

Si l'on note  $K_N = \frac{1}{\varepsilon}$  appelée communément "**raideur de choc**", on retrouve la relation classique, modélisant un choc élastique :

$$F_N^{1/2} = -K_N \cdot d_N^{1/2} \quad [\text{éq 6.3.1-2}]$$

Le graphe approché de la loi de contact avec pénalisation est le suivant :

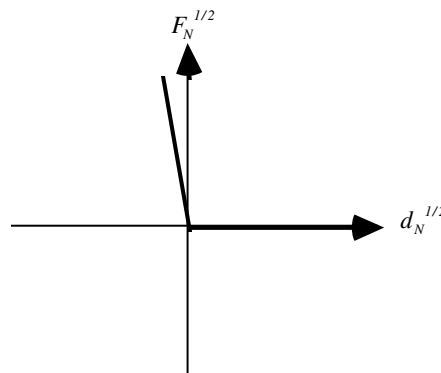


Figure 6.3.1-a : Graphe de la relation de contact unilatéral approchée par pénalisation.

En dynamique, pour tenir compte d'une éventuelle perte d'énergie dans le choc, on introduit un "amortissement de choc"  $C_N$ . L'expression de la force normale de contact s'exprime alors par :

$$F_N^{1/2} = -K_N \cdot d_N^{1/2} - C_N \cdot \dot{u}_N^{1/2} \quad [\text{éq 6.3.1-3}]$$

où  $\dot{u}_N^{1/2}$  est la vitesse normale relative de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Omega_2$ . Pour respecter la relation de Signorini (pas d'adhérence en contact), on doit par contre vérifier a posteriori que  $F_N^{1/2}$  est positive ou nulle. On ne prendra donc que la partie positive  $\langle \cdot \rangle^+$  de l'expression [éq 6.3.1-3] :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle^+ &= x & \text{si } x &\geq 0 \\ \langle x \rangle^+ &= 0 & \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

La relation complète donnant la force normale de contact qui est retenue pour l'algorithme est la suivante:

$$\left. \begin{aligned} \text{si } d_N^{1/2} \leq 0 \quad F_N^{1/2} &= \langle -K_N \cdot d_N^{1/2} - C_N \cdot \dot{u}_N^{1/2} \rangle^+ ; \quad F_N^{2/1} = -F_N^{1/2} \\ \text{sinon } F_N^{2/1} &= F_N^{1/2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad [\text{éq 6.3.1-4}]$$

### 6.3.2 Modèle de force tangentielle de contact en dynamique

Le graphe décrivant la force tangentielle avec loi de Coulomb est non-différentiable pour la phase d'adhérence  $\dot{u}_T^{1/2} = 0$ . On introduit donc une relation univoque liant le déplacement tangentiel relatif

$\mathbf{d}_T^{1/2}$  et la force tangentielle  $\mathbf{F}_T^{1/2} = f_\xi(\mathbf{d}_T^{1/2})$  au moyen d'un paramètre  $\xi$ . Le graphe de  $F_\xi$  doit tendre vers le graphe de Coulomb lorsque  $\xi$  tend vers zéro [bib6].

Une des possibilités consiste à écrire une relation linéaire entre  $\mathbf{d}_T^{1/2}$  et  $\mathbf{F}_T^{1/2}$  :

en notant  $a^0$  la valeur d'une quantité  $a$  au début du pas de temps :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} - \mathbf{F}_T^{1/2\ 0} = -\frac{1}{\xi} \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2\ 0}) \quad [\text{éq 6.3.2-1}]$$

Si l'on introduit une "raideur tangentielle"  $K_T = \frac{1}{\xi}$ , on obtient la relation :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} = \mathbf{F}_T^{1/2\ 0} - K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2\ 0}) \quad [\text{éq 6.3.2-2}]$$

Pour des raisons numériques, liées à la dissipation de vibrations parasites [bib7] en phase d'adhérence, on est amené à ajouter un "amortissement tangentiel"  $C_T$  dans l'expression de la force tangentielle. Son expression finale est :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} = \mathbf{F}_T^{1/2\ 0} - K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \mathbf{d}_T^{1/2\ 0}) - C_T \cdot \dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}, \quad \mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad [\text{éq 6.3.2-3}]$$

Il faut de plus que cette force vérifie le critère de Coulomb, soit :

$$\|\mathbf{F}_T^{1/2}\| \leq \mu \cdot F_N^{1/2} \text{ sinon on applique } F_T^{1/2} = -\mu \cdot F_N^{1/2} \cdot \frac{\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}}{\|\dot{\mathbf{u}}_T^{1/2}\|}, \quad \mathbf{F}_T^{2/1} = -\mathbf{F}_T^{1/2} \quad [\text{éq 6.3.2-4}]$$

Le graphe approché de la loi de frottement de Coulomb modélisée par pénalisation est le suivant :

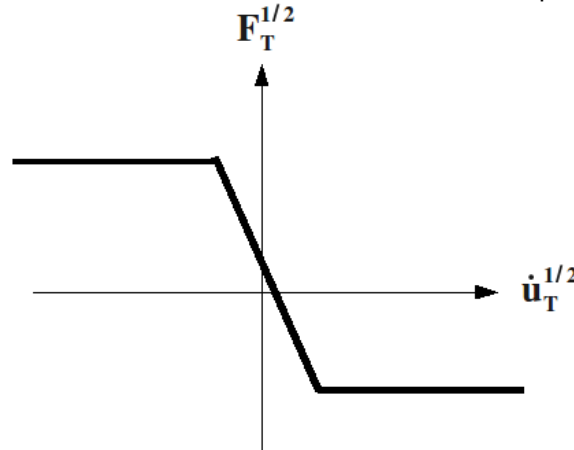


Figure 6.3.2-a : Graphe de la loi de frottement approchée par pénalisation.

### 6.3.3 Modèle de force tangentielle de contact en statique

En introduisant comme en dynamique une raideur tangentielle :

$$\mathbf{F}_T^{1/2} = K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \delta),$$

où  $\delta$  est le glissement tangentiel.

En notant  $\delta^0$  le glissement tangentiel au début du pas, on commence par évaluer :

$$\mathbf{F}_T^0 = K_T \cdot (\mathbf{d}_T^{1/2} - \delta^0)$$

Si  $\|\mathbf{F}_T^{1/2}\| \leq \mu \cdot F_N^{1/2}$  alors  $\delta = \delta^0$ .

Sinon, comme en plasticité, on introduit un multiplicateur  $\lambda$  :

$$\Delta \delta = \lambda \mathbf{F}_T^0 / K_T$$

et on obtient  $\lambda = 1 - \frac{\mu F_N^{1/2}}{\|\mathbf{F}_T^0\|}$ .

## 6.4 Définition des paramètres de contact

On précise ici les mots-clés permettant de définir les paramètres de contact, amortissement et frottement [U4.43.01] :

L'opérande `RIGI_NOR` est obligatoire, il permet de donner la valeur de raideur normale de choc  $K_N$ .

Les autres opérandes sont facultatifs :

- L'opérande `AMOR_NOR` permet de donner la valeur d'amortissement normal de choc  $C_N$ .
- L'opérande `RIGI_TAN` permet de donner la valeur de raideur tangentielle  $K_T$ .
- L'opérande `AMOR_TAN` permet de donner la valeur d'amortissement tangentielle de choc  $C_T$ .
- L'opérande `COULOMB` permet de donner la valeur du coefficient de Coulomb.
- L'opérande `DIST_1` permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le premier nœud de choc
- L'opérande `DIST_2` permet de définir la distance caractéristique de matière entourant le deuxième nœud de choc (choc entre deux structures mobiles)
- L'opérande `JEU` définit la distance entre le nœud de choc et un obstacle non modélisé (cas d'un choc entre une structure mobile et un obstacle indéformable et immobile).

## 7 Modélisation de la liaison grille-crayon : DIS\_GRICRA

Le comportement `DIS_GRICRA` est utilisé pour modéliser le comportement en translation et en rotation des ressorts de liaison grille - crayon des assemblages combustibles. La loi de comportement a été conçue pour être utilisée avec des discrets à deux nœuds `MECA_DIS_TR_L`.

### 7.1 Présentation générale

Le maintien des crayons dans les cellules de grille est assuré par le système de bossettes et de ressorts représenté sur la figure suivante :

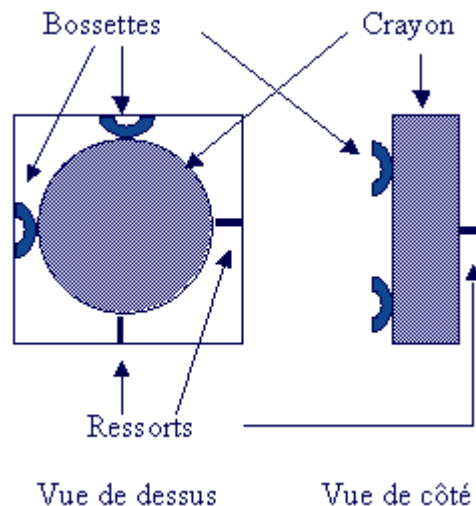


Figure 7.1-a : Schéma d'une cellule de grille.

Le crayon est donc maintenu dans la cellule de grille par 6 points de contact (cf. figure 7.1-a) : 4 bossettes et 2 ressorts. Il est possible de modéliser chacun des éléments de contact (bossettes et ressorts) grâce à des éléments discrets, auxquels on affecte une loi de frottement de type `DIS_CHOC`. Une telle modélisation permet de représenter de manière satisfaisante le comportement d'une cellule de grille en translation (extraction du crayon) et en rotation. Une telle méthode a cependant les désavantages suivants :

- Complexité du maillage à produire, car il faut 6 discrets par cellule de grille (ou par grille dans un modèle homogénéisé), avec des hauteurs différentes pour les bossettes et les ressorts.
- Complexité dans la définition des caractéristiques des discrets, car il faut différencier les bossettes et les ressorts
- Dissymétrie de la modélisation (bossette d'un côté et ressort en opposition), alors que le comportement homogénéisé sur une grille peut être considéré comme symétrique, compte-tenu de l'alternance de l'orientation des cellules de grille dans les grilles.
- Difficultés pour identifier les paramètres du comportement des discrets à l'échelle d'un assemblage combustible.

Une modélisation équivalente appelée `DIS_GRICRA` a été proposée, qui permet de retrouver le même comportement que le système de 6 discrets en translation et en rotation, tout en évitant les désavantages cités ci-dessus :

- La liaison grille-crayon est modélisée par 4 éléments discrets en croix dans un même plan, ce qui simplifie le maillage et permet de symétriser le problème.
- Les 4 éléments sont affectés des mêmes paramètres pour la loi de comportement `DIS_GRICRA`.
- Les comportements en translation et en rotation sont traités séparément, ce qui facilite une identification des paramètres.

#### Remarque :

*Afin de représenter correctement le comportement de la liaison dans toutes les directions, surtout en rotation, il est nécessaire d'utiliser 4 discrets disposés en croix, le crayon étant lié aux discrets au milieu du dispositif en croix.*

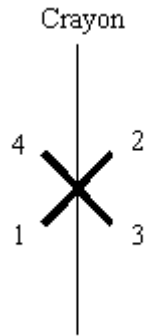


Figure 7.1-b : Dispositif de 4 discrets en croix nécessaire à la modélisation du comportement d'une cellule de grille.

## 7.2 Définition du repère local

Les équations de la loi de comportement sont écrites dans le repère local du discret. Compte-tenu du caractère orthotrope du comportement dans les directions tangentiels au discret, on adopte la convention suivante pour la définition du repère locale du discret : l'axe  $x$  représente l'axe du discret, l'axe  $y$  correspond à la direction du crayon, et l'axe  $z$  est l'axe orthogonal à  $x$  et  $y$ . Pour les angles de rotation, on notera  $\Phi$  l'angle de rotation autour de l'axe  $x$  (DRX) et  $\theta$  l'angle de rotation autour de l'axe  $z$  (DRZ). On ne s'intéresse pas à l'angle de rotation autour de  $y$  (DRY), car il faut bloquer cette rotation (condition limite) dans le fichier de commande.

Avec cette définition du repère local, la direction  $y$  est commune à tous les discrets du système en croix représenté sur la figure 7.2-a. La direction  $x$  des discrets 1 et 2 correspond à la direction  $z$  des discrets 3 et 4 (et vice versa). L'angle  $\Phi$  de 1 et 2 correspond à l'angle  $\theta$  de 3 et 4 (et vice versa).

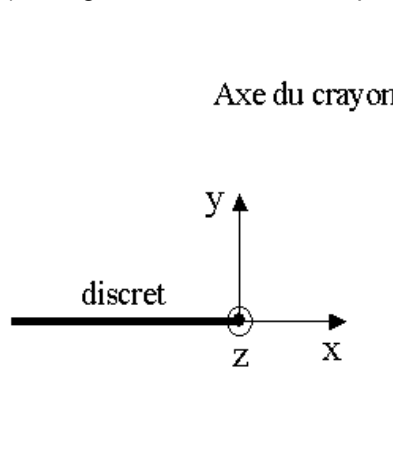


Figure 7.2-a : Définition du repère local.

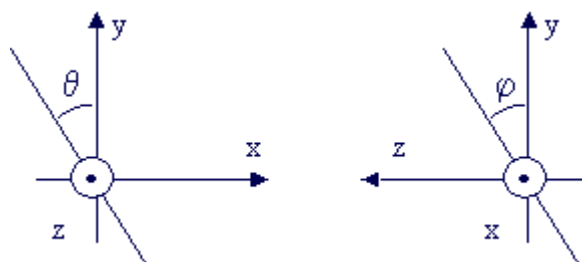


Figure 7.2-b : Définition des angles.

## 7.3 Comportement en translation

### 7.3.1 Présentation du comportement

Le comportement en translation est modélisé par une loi de type frottement de Coulomb [Figure 7.3.1-a].

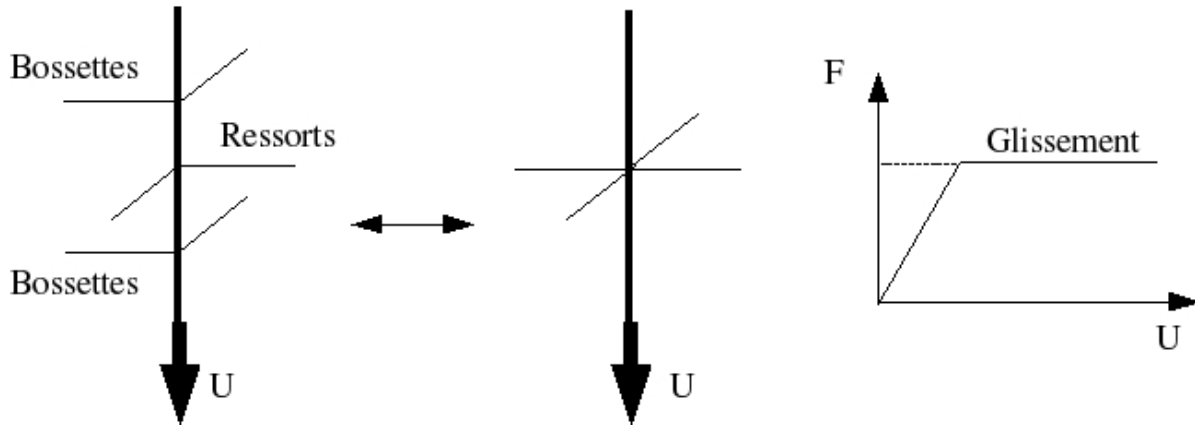


Figure 7.3.1-a : Loi de comportement en translation.

Des types de comportements différents sont affectés selon les directions :

#### Direction $x$

On considère un comportement élastique, avec une force initiale à déplacement nul égale à l'opposé de la force de serrage (la force exercée par le crayon sur le discret comprime le discret) :

$$F_x = K_N \Delta x - F_N^0$$

#### Direction $y$

On considère un comportement élasto-plastique quasi-parfait pour modéliser le frottement de Coulomb et la possibilité de glissement. La force s'exprime de la façon suivante :

$$F_y = K_T [\Delta y - U_y^p]$$

où  $\Delta y$  est la déformation du discret selon  $y$  et  $U_y^p$  représente le glissement

Le critère de glissement est le suivant :

$$\|F_y\| \leq F^S + \kappa \lambda \quad \text{avec} \quad F^S = -\mu F_N^0$$

où  $\kappa$  est un paramètre du modèle,  $\lambda$  est le paramètre d'écroissage et  $\mu$  est le coefficient de

Coulomb. La loi d'écoulement est la suivante :  $\dot{U}_y^p = \dot{\lambda} \frac{F_y}{\|F_y\|}$

On se réfèrera au document [R5.03.09] sur l'intégration des lois non linéaires 1D pour l'intégration numérique de cette loi élasto-plastique de type Von Mises avec écroissage isotrope.

Cette force est identique pour les 4 discrets du système en croix, car ils ont la même direction  $y$ .

#### Direction $z$

On rappelle que la loi de comportement grille-crayon `DIS_GRICRA` doit être utilisée avec une configuration de discrets en croix. Il est dès lors inutile de définir une force dans la direction  $z$  du discret, car la rigidité est « reprise » par les discrets orthogonaux (cf. section précédente).



## 7.3.2 Paramètres introduits

Le comportement en translation nécessite l'introduction de 5 paramètres :

- KN\_AX : rigidité axiale du discret
- KT\_AX : rigidité tangentielle (dans la direction de glissement) du discret
- F\_SER ou F\_SER\_FO : force de serrage du crayon dans la grille, dans la direction axiale du discret
- COUL\_AX : coefficient de Coulomb pour la loi de frottement
- ET\_AX : paramètres d'écroûissage permettant de faire converger la loi de frottement. Ce paramètre est facultatif, une valeur de  $10^{-7}$  est proposée par défaut dans Code\_Aster.

La force nécessaire pour extraire un crayon d'une grille est égale à  $F\_SER * COUL\_AX$  (force d'extraction).

## 7.4 Comportement en rotation

### 7.4.1 Présentation du comportement

L'étude de la liaison grille-crayon en rotation avec le système bossettes-ressorts a montré qu'on pouvait décrire le comportement en superposant deux comportements simples :

- un phénomène de glissement des éléments orthogonaux au plan de rotation, modélisé par une loi de Coulomb similaire à celle utilisée en translation [Figure 7.4.1-a].
- un comportement élastique bilinéaire dans le plan de rotation, induit par la possibilité de décollement du crayon par rapport à une bossette à partir d'un certain angle [Figure 7.4.1-a].

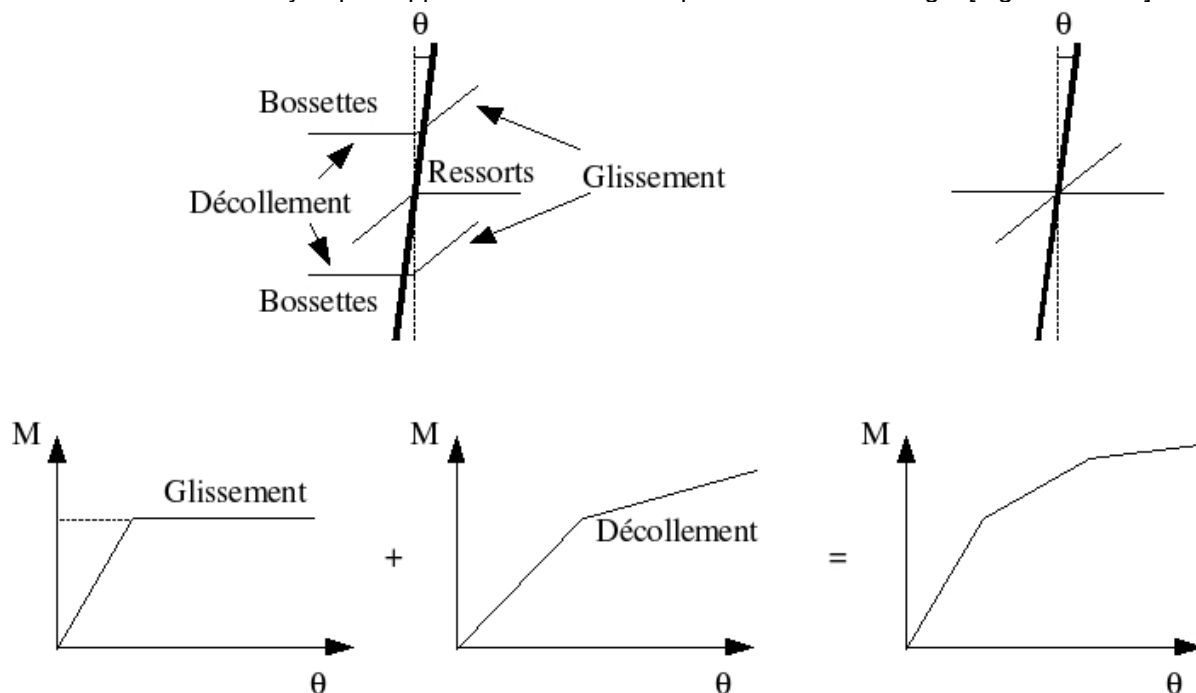


Figure 7.4.1-a : Schéma du comportement de la liaison grille-crayon en rotation.

C'est pour assurer cette superposition d'un comportement élasto-plastique et avec un comportement élastique bilinéaire que la configuration de 4 discrets en croix est nécessaire. Si on considère une rotation d'un angle  $\theta$  dans le repère global correspondant au repère local des discrets 1 et 2, cet angle correspond à l'angle  $\Phi$  des discrets 3 et 4. Il suffit alors d'imposer aux discrets la loi élastoplastique sur l'angle  $\theta$  (du repère local) et la loi élastique bilinéaire sur l'angle  $\Phi$  (du repère local) pour avoir une superposition des deux comportements grâce au système de discrets en croix.

Des types de comportements différents sont affectés selon les angles :

#### Rotation autour de l'axe $x$

On considère un comportement élasto-plastique de type Von Mises avec écrouissage isotrope pour modéliser le frottement en rotation. Le moment s'exprime en fonction de l'angle et d'un angle « plastique » ou angle de glissement :

$$M_x = K_\phi [\phi - \phi^p]$$

où  $\phi$  est l'angle de rotation autour de  $x$  et  $\phi^p$  représente l'angle de glissement

Le critère de glissement est le suivant :

$$\|M_\phi\| \leq M^s + \kappa \lambda \quad \text{où } \kappa \text{ est un paramètre du modèle, } \lambda \text{ est le paramètre d'écrouissage et } M^s \text{ est le moment-seuil défini par des paramètres du modèle.}$$

La loi d'écoulement est la suivante :

$$\dot{M}_\phi^p = \dot{\lambda} \frac{M_\phi}{\|M_\phi\|}$$

On se référera au document [R5.03.09] sur l'intégration des lois non linéaires 1D pour l'intégration numérique de cette loi élasto-plastique de type Von Mises avec écrouissage isotrope, en remplaçant la force par le moment et la déformation par la différence d'angle.

#### Rotation autour de l'axe $z$

Le comportement autour de l'axe  $z$  est considéré élastique bilinéaire. Le moment autour de l'axe  $z$  s'exprime en fonction de l'angle de rotation autour de l'axe  $z$  de la façon suivante :

$$M_\theta = K^1 \theta \quad \text{si } \theta \in [-\theta^s, \theta^s]$$

$$M_\theta = K^2 \theta [\theta - \theta^s] + K^1 \theta^s$$

où  $\theta^s$  est l'angle de changement de pente élastique.

#### Rotation autour de l'axe $y$

En ce qui concerne la rotation autour de l'axe  $y$ , il est impératif de bloquer cette rotation car aucune loi n'a été identifiée pour ce degré de liberté, le crayon ne tournant pas. Cependant, afin de limiter le mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, une rigidité est introduite dans le code, à partir des autres rigidités en rotation. Cette rigidité est invisible pour l'utilisateur et n'a pas d'influence sur les calculs, le degré de liberté correspondant étant bloqué.

## 7.4.2 Paramètres introduits

Le comportement en rotation nécessite l'introduction de 5 paramètres, soit sous forme de constantes (ANG1, ANG2, PEN1, PEN2, PEN3), soit sous forme de fonctions de la température et de l'irradiation (ANG1\_FO, ANG2\_FO, PEN1\_FO, PEN2\_FO, PEN3\_FO). Un paramètre supplémentaire facultatif ET\_ROT (égal à 10E-7 par défaut) permet de faire converger le comportement de glissement. Le rôle de chacun des paramètres s'explique aisément sur la courbe angle-moment représentée sur la figure 7.4.2-a :

- Au départ, il n'y a pas de glissement et pas de décollement, la rigidité en rotation est égale à PEN1 (ou PEN1\_FO).
- À partir de l'angle ANG1 (ou ANG1\_FO), le phénomène de glissement sur les discrets orthogonaux au plan de rotation est activé, ces éléments ne participent donc plus à la rigidité en rotation et la pente diminue et devient PEN2 (ou PEN2\_FO).
- À partir de l'angle ANG2 (ou ANG2\_FO), il y a toujours le glissement, auquel s'ajoute le décollement du crayon par rapport à certaines bossettes, d'où une diminution de la rigidité. Celle-ci devient égale à PEN3 (ou PEN3\_FO).
- Lorsqu'ensuite on décharge, il y a toujours décollement, mais il n'y a plus glissement, la pente devient PEN1 - PEN2 + PEN3 (ou PEN1\_FO - PEN2\_FO + PEN3\_FO).
- Lorsqu'on atteint deux fois ANG1 (ou ANG1\_FO) à partir du début de la décharge, le glissement est réactivé, et on a toujours décollement, d'où une pente égale à PEN3 (ou PEN3\_FO).

- À partir de ANG2 (ou ANG2\_FO), on a recollement du crayon sur les bossettes, d'où une pente égale à PEN2 (ou PEN2\_FO).

Les valeurs de paramètres utilisés pour la figure 7.4.2-a sont les suivants :  $ANG1=0.001\text{rad}$  ,  $ANG2=0.004\text{rad}$  ,  $PEN1=1000\text{ N.m.rad}^{-1}$  ,  $PEN2=250\text{ N.m.rad}^{-1}$  ,  $PEN3=90\text{ N.m.rad}^{-1}$  .

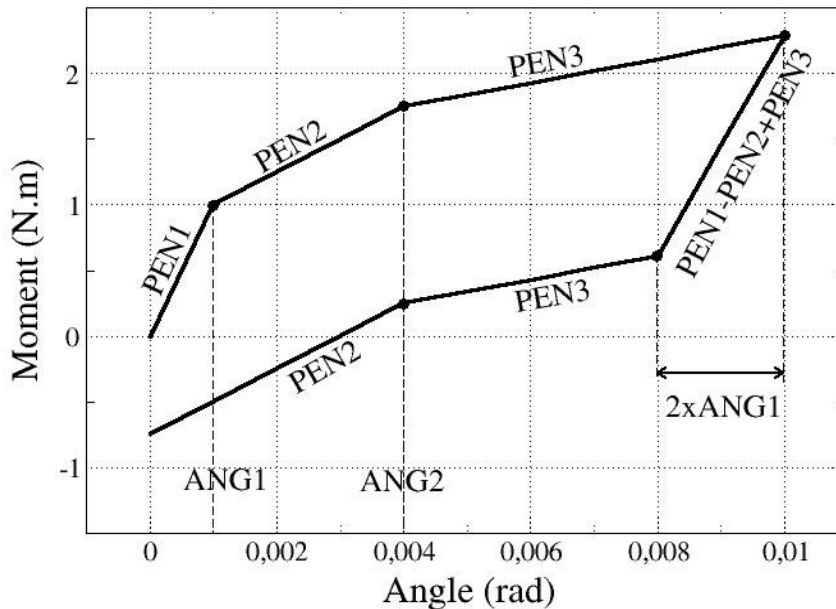


Figure 7.4.2-a : Courbe angle-moment sur un essai de charge et décharge en rotation pour la loi DIS\_GRICRA.

## 7.5 Remarque

Les forces et moments dépendent des déplacements et angles de rotation relatifs entre les deux nœuds du discret. On écrit dans cette section les forces et moments au nœud 2, et on prend comme convention d'écriture  $\Delta \alpha = \Delta \alpha(n2) - \Delta \alpha(n1)$  , qui représente la « déformation » associée au degré de liberté  $\alpha$  pour le discret exprimée au nœud  $n2$  . La force au nœud  $n1$  est égale à l'opposé de la force au nœud  $n2$  . Il en résulte que la matrice tangente est de la forme suivante :

$$\underline{K}^{\text{tan}} = \begin{pmatrix} \underline{K} & -\underline{K} \\ -\underline{K} & \underline{K} \end{pmatrix}$$

Le comportement de la liaison grille crayon est différent pour chacun des degrés de liberté, et indépendant des autres degrés de libertés. Il en résulte que chacune des composantes de la force ne dépend que du degré de liberté auquel elle est associée, et que les blocs  $\underline{K}$  de la matrice tangente  $\underline{K}^{\text{tan}}$  sont diagonaux.

## 7.6 Utilisation

### 7.6.1 Type d'éléments

Les caractéristiques suivantes des éléments discrets doivent être affectées dans la commande `AFFE_CARA_ELEM` pour pouvoir utiliser `DIS_GRICRA` (cf. document [V6.02.131]) :

```
AFFE_CARA_ELEM(  
  MODELE=modele,  
  DISCRET=_F( GROUP_MA=('mailles'),  
              CARA = 'K_TR_L',  
              VALE = 'liste de 78 termes',  
              REPERE='LOCAL')
```

Le comportement `DIS_GRICRA` pour la liaison grille-crayon ne peut être utilisé qu'avec des éléments discrets à deux nœuds et 6 degrés de libertés `MECA_DIS_TR_L`. On doit donc spécifier `'K_TR_L'` sous `CARA`.

Contrairement aux autres comportements pour les discrets, `DIS_GRICRA` n'utilise pas la rigidité du discret donnée dans `AFFE_CARA_ELEM` sous le mot-clé `VALE`. Étant donné que le mot-clé `VALE` doit tout de même être rempli, il est conseillé d'affecter une liste de 78 termes nuls. Dans le cas d'un calcul de mode propre, la loi de comportement `DIS_GRICRA` n'est pas sollicitée, donc il faut alors rentrer les rigidités du discret qui correspondent au régime élastique de `DIS_GRICRA`.

On travaille dans le repère local.

```
ORIENTATION=_F( GROUP_MA=('mailles',),  
               CARA='VECT_Y', VALE = vect_crayon
```

`vect_crayon` est un vecteur directeur du crayon. La direction du crayon doit impérativement être donnée sous le mot-clé `ORIENTATION`.

Par ailleurs, le champ d'irradiation est obtenu par cumul de l'historique vécu (stocké en variable interne) et de l'incrément du champ introduit par les variables de commandes entre le pas de temps courant et l'instant précédent.

### 7.6.2 Définition des caractéristiques du matériau

Le comportement `DIS_GRICRA` nécessite l'introduction de 10 paramètres. Ces données doivent être fournies dans `DEFI_MATERIAU`. Les paramètres d'entrée de cette loi sont les suivants :

Comportement en glissement axial : 5 paramètres (dont un paramètre arbitraire, purement numérique) :

- rigidité normale du discret `KN_AX` ;
- rigidité tangentielle (dans la direction du glissement) `KT_AX` ;
- coefficient de frottement de Coulomb `COUL_AX` ;
- force de serrage `F_SER` (limite de glissement = `COUL_AX*F_SER`) ;
- paramètre d'écrouissage `ET_AX` (la loi de comportement peut être assimilée à de la plasticité parfaite. Le paramètre d'écrouissage ne sert qu'à assurer la convergence du calcul ; une valeur par défaut de  $1.0 \cdot 10^{-7}$  lui est affectée) ;

Comportement en rotation : 6 paramètres (dont un paramètre purement numérique)

- pentes successives `PEN1`, `PEN2` et `PEN3` de la courbe Moment = f(angle) ;
- angles `ANG1` et `ANG2` des points d'inflexion de la courbe ;
- paramètre d'écrouissage `ET_ROT` (paramètre ne servant qu'à assurer la convergence du calcul ; une valeur par défaut de  $1.0 \cdot 10^{-7}$  lui est affectée).

Les forces de serrage peuvent varier en fonction de la température et de l'irradiation. Ces dépendances sont affectées sur les pentes `PEN1` et `PEN2` pour le comportement en rotation et sur la force de serrage `F_SER` pour le comportement en glissement axial. Les fonctions de dépendance sont définies directement sous forme d'une `FORMULE` dans le fichier de commande.

Les noms des paramètres suivis du suffixe `_FO` permettent de renseigner la valeur sous la forme d'une fonction. Un certain nombre de paramètres supplémentaires, disponibles pour ce comportement mais qui ne figurent pas dans le présent document, sont explicités dans [V6.04.131]. Les paramètres de dépendance en température et en irradiation de la force de serrage sont définis dans le document [V6.02.131].

### 7.6.3 Variables internes

Elles sont au nombre de 6 :

- $V1$  : déplacement plastique cumulé (direction axiale)
- $V2$  : indicateur de contact/frottement (1 si glissement, 0 si non glissement)
- $V3$  : indicateur de décollement en rotation,
- $V4$  : angle plastique (glissement),
- $V5$  : angle plastique cumulé,
- $V6$  : mémorisation de l'historique d'irradiation (fluence).

## 8 Bibliographie

- [1] J.ANGLES : "Modélisation des assemblages filetés...". Note EDF/DER HI74-99-020A.
- [2] J.M.PROIX, B.QUINNEZ, P. MASSIN, P. LACLERGUE : "Assemblages combustibles sous irradiation. Etude de faisabilité". Note EDF/DER HI-75/97/017/0.
- [3] G.JACQUART : "Méthodes de Ritz en dynamique non-linéaire - Application à des systèmes avec choc et frottement localisé" - Rapport EDF/DER HP61/91.105.
- [4] M.JEAN, J.J.MOREAU : "Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection" Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium - ed. A. CURNIER - Presses Polytechniques et Universitaires Romandes - Lausanne, 1992, pp 31-48.
- [5] J.T.ODEN, J.A.C.MARTINS : "Models and computational methods for dynamic friction phenomena" - Computational Methods Appl. Mech. Engng. 52, 1992, pp 527-634.
- [6] B.BEAUFILS : "Contribution à l'étude des vibrations et de l'usure des faisceaux de tubes en écoulement transversal" - Thèse de doctorat PARIS VI.
- [7] Fe.WAECKEL, G.DEVESA : « Dossier de spécifications d'un modèle de choc dans la commande `DYNA_NON_LINE` du `Code_Aster` ». Note EDF/DER HP-52/97/026/B.
- [8] J.LEMAÎTRE, J.L.CHABOCHE « Mécanique des matériaux solides », éditions Dunod, 2ème édition 2004.
- [9] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, B.P. FLANNERY. Numerical Recipes, 2nd edition, §16.2 (Integration of Ordinary Differential Equations), Cambridge University Press, 1992.

## 9 Historique des versions du document

Indice doc	Version Code_Aster	Auteur(s) contributeur(s) organisme(s)	Description des modifications
A	5	J.M.PROIX, B.QUINNEZ EDF/R&DMMN	Texte initial, lois de comportement DIS_GOUJ2E_PLAS, DIS_GOUJ2E_ELAS et DIS_CONTACT
C	7.4	G.DEVESA EDF/R&D/AMA	Ajout de la loi DIS_CHOC
D	8.5	V.GODARD EDF/R&D/AMA	Ajout de la loi DIS_GRICRA
E	9.4	F.VOLDOIRE, J.L.FLEJOU EDF/R&D/AMA	Ajout de DIS_BILI_ELAS, DIS_ECRO_CINE, DIS_VISC, résorption de DIS_CONTACT
F	11	J.L.FLEJOU EDF/R&D/AMA	Corrections formules, mises à jour par rapport à la version 11.
G	12	F.VOLDOIRE, J.L.FLEJOU EDF/R&D/AMA	Remplacement du modèle DIS_VISC.