Mise en œuvre de procédure de recalage modal

Résumé :

Dans ce document, on présente des techniques de recalage modal. Le recalage modal consiste à exploiter les modes propres de la structure afin d'obtenir un modèle numérique qui reflète au mieux le comportement dynamique de la structure étudiée.

Table des Matières

1 Introduction

Le recalage modal consiste à ajuster les paramètres du modèle numérique à partir de la connaissance des modes propres identifiés expérimentalement sur la structure réelle.

En utilisant des techniques d'optimisation, on essaie de trouver le modèle numérique où les modes propres associés sont proches des modes propres identifiés expérimentalement.

On présente dans ce document trois techniques de recalage modal. Les deux premières sont dédiées au système conservatif et la troisième est dédiée au système dissipatif.

2 Recalage modal d'un système conservatif

Deux techniques de recalage modal sont présentées. La première exploite la sensibilité des modes propres et la deuxième exploite la diagonalité des matrices généralisées.

2.1 Exploitation de l'écart entre déformées modales et l'écart entre fréquences propres

On essaie de trouver les paramètres du modèle numérique tels que la déformée modale calculée restreinte aux points d'observation soit colinéaire à la déformée modale obtenue expérimentalement et que la fréquence propre associée soit égale fréquence propre identifiée expérimentalement.

Pour cela, on calcule le produit scalaire normé entre la déformée propre mesurée et la déformée propre calculée restreinte aux ddl associés aux points de mesure. Ce calcul correspond au calcul de MAC (Modal Assurance Criterion).

Si on désigne respectivement par $(y_{i_{num}}, f_{i_{num}})$ et $(y_{i_{mes}}, f_{i_{mes}})$ les modes propres calculés et les modes propres identifiés, on a :

$$MAC(y_{i_{num}}, y_{i_{mes}}) = \frac{(y_{i_{num}}^T y_{i_{mes}})^2}{(y_{i_{num}}^T y_{i_{num}})(y_{i_{mes}}^T y_{i_{mes}})}$$

On définit les vecteurs V et F_r tels que :

$$V = \begin{pmatrix} \vdots \\ MAC(y_{i_{num}}, y_{i_{mes}}) - 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$F_r = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_{i_{num}} - f_{i_{mes}} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La fonctionnelle à minimiser se formule comme suit :

$$\epsilon = V^T W_{MAC} V + F_r^T W_{freq} F_r$$

Il faut bien évidement évaluer l'écart entre deux modes analogues. Ainsi, cette technique n'est pas adaptée à une structure où la densité modale est importante.

Cette procédure est utilisée par `MACR_RECAL` (option `DYNAMIQUE`) dans le cas test sdls121a [V2.03.121].

2.2 Exploitation de l'orthogonalité des modes propres mesurés

A partir des déformées modales relevées aux points d'observation, o n effectue une expansion sur le modèle numérique support. On essaie, par la suite, de retrouver les paramètres du modèle numérique de sorte que les matrices de masse et de raideur généralisées relatives aux modes identifiés expérimentalement soient diagonales et que l'écart entre la pulsation propre mesurée et la pulsation propre calculée soit minimal.

On estime la pulsation propre (ou plus exactement le carré de la pulsation) en calculant le rapport entre la raideur généralisée et la masse généralisée du mode identifié.

Cette technique ne nécessite, ni un appariement entre le mode expérimental et le mode numérique, ni un calcul modal. Elle est donc adaptée aux structures où la densité modale est élevée. Elle nécessite néanmoins l'expansion des modes identifiés sur le modèle numérique.

L'expansion du i-ième mode identifié sur le modèle numérique peut se faire de la manière suivante :

- On choisit une base d'expansion composée de déformées modales calculées avec le modèle numérique support :

$$Y=[y_1 \ldots y_n]$$

- On calcule ensuite les coordonnées η_i de la déformée modale identifiée Φ_i^{mes} sur la base Y, restreinte aux points d'observation. Ces coordonnées peuvent être obtenues par une minimisation de type moindres carrés.

$$\varepsilon=\left(\Phi_i^{mes}-Y\,\eta_i\right)^T W_i\left(\Phi_i^{mes}-Y\,\eta_i\right)$$

- On effectue par la suite une expansion de la déformée identifiée sur les ddl du modèle numérique : $\Phi_i=Y\,\eta_i$

L'étape suivante consiste à calculer les matrices généralisées normalisées :

$$MAC_W(i,j)=\frac{(\Phi_i^T W \Phi_j)^2}{(\Phi_i^T W \Phi_i)(\Phi_j^T W \Phi_j)}$$

Si la matrice de pondération W est égale à la matrice de masse M ou à la matrice de rigidité K, MAC_W devient une matrice diagonale.

Il s'agit ensuite de trouver les termes des matrices K et M qui minimisent à la fois :

$MAC_K(i,j)$ pour $i\neq j$
$MAC_M(i,j)$ pour $i\neq j$
Ecart entre la i-ième pulsation propre identifiée $\hat{\omega}_i^2$ et $\omega_i^2=\dfrac{\Phi_i^T K\,\Phi_i}{\Phi_i^T M\,\Phi_i}$

La matrice MAC_W est symétrique, on peut ranger sa partie triangulaire inférieure dans un vecteur nommé $MAC_{W(i<j)}$. La fonctionnelle à minimiser peut se formuler alors comme suit :

$$\varepsilon=MAC^T_{K(i<j)}W_K\,MAC_{K(i<j)}+MAC^T_{M(i<j)}W_M\,MAC_{M(i<j)}+\sum_i\left(\hat{\omega}_i^2-\frac{\Phi_i^T K\,\Phi_i}{\Phi_i^T M\,\Phi_i}\right)^T W_i\left(\hat{\omega}_i^2-\frac{\Phi_i^T K\,\Phi_i}{\Phi_i^T M\,\Phi_i}\right)$$

On peut choisir les matrices de pondération suivante :

W_K = nb_modes_identifiés * I_d
W_M = nb_modes_identifiés * I_d
W_i = 0.5 * nb_modes_identifiés * (nb_modes_identifiés – 1) * I_d

Où I_d est la matrice identité

Ce choix de pondération permet d'affecter le même poids aux équations sur les fréquences et aux équations sur les termes extra-diagonaux des matrices généralisées.

La mise en œuvre de cette démarche de recalage modal est illustrée dans la modélisation d du cas test sdls121 [V2.03.121].

3 Recalage modal d'un système dissipatif

Dans le cas d'un système dissipatif, on exploite la relation de norme des déformées modales complexes.

Le recalage modal utilisé ici consiste à trouver les paramètres du modèle de telle sorte que les modes propres identifiés expérimentalement vérifient les relations de norme associées au modèle numérique.

La structure dissipative est modélisée comme suit :
$M\ddot{y}+B\dot{y}+Ky=0$

Où : M désigne la matrice de masse
B désigne la matrice d'amortissement
K désigne la matrice de rigidité
y désigne le déplacement

On fait l'hypothèse que les matrices du système sont symétriques.

Dans la majorité des cas, la matrice modale du système conservatif associé à ce système dissipatif ne diagonalise pas simultanément les trois matrices M , B et K . On se ramène alors à un système différentiel du premier ordre dans l'espace de dimension 2N.

On introduit le vecteur d'état : $x=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$

On transforme les N équations du second ordre en 2N équations du premier ordre de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que l'on peut écrire : $U\dot{x}-Ax=0$

Avec cette transformation, les solutions propres sont de la forme : $x_\nu=\begin{bmatrix} y_\nu \\ s_\nu y_\nu \end{bmatrix}$

Où s_ν correspond à la valeur propre associée à x_ν .

Les valeurs propres peuvent être réelles ou complexes. Si la structure est faiblement amortie, toutes les valeurs propres sont complexes conjuguées.

La matrice spectrale se met alors sous la forme suivante : $\underset{(2N,2N)}{S} = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2 \end{bmatrix}$

Et la matrice modale associée : $\underset{(2N,2N)}{X} = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} \\ YS_2 & Y\bar{S}_2 \end{bmatrix}$

Avec : $\underset{(N,N)}{Y} = [y_\nu]$

La matrice modale X vérifie les relations d'orthonormalité suivantes : $\begin{cases} X^T UX = N_0 \\ X^T AX = N_0 S \end{cases}$

Où N_0 est une matrice diagonale qui définit la norme de X : $N_0 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \end{bmatrix}$

Compte tenu des découpages en sous-matrices, le développement de la première ligne des relations d'orthonormalité s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} Y^T BY + S_2 Y^T MY + Y^T MYS_2 = N_2 \\ Y^T B\bar{Y} + S_2 Y^T M\bar{Y} + Y^T MY\bar{S}_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

et : $$\begin{cases} S_2 Y^T MYS_2 - Y^T KY = N_2 S_2 \\ S_2 Y^T MY\bar{S}_2 - Y^T K\bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Les termes diagonaux de la première ligne des systèmes d'équations (1) et (2) conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{cases} y_\nu^T B y_\nu + 2 s_\nu y_\nu^T M y_\nu = n_\nu \\ s_\nu^2 y_\nu^T M y_\nu - y_\nu^T K y_\nu = s_\nu n_\nu \end{cases}$$

La combinaison de ces deux équations conduit à :

$$s_\nu^2 y_\nu^T M y_\nu + s_\nu y_\nu^T B y_\nu + y_\nu^T K y_\nu = 0 \quad (3)$$

De même, les termes diagonaux de la deuxième ligne des deux systèmes d'équations (1) et (2) conduisent aux équations suivantes :

$$y_\nu^T B\bar{y}_\nu + 2\Re(s_\nu) y_\nu^T M\bar{y}_\nu = 0 \quad (4)$$

$$s_\nu \bar{s}_\nu y_\nu^T M\bar{y}_\nu - y_\nu^T K\bar{y}_\nu = 0 \quad (5)$$

Ces trois équations (3) (4) et (5) doivent également être vérifiées pour tous les modes propres identifiés sur la structure réelle. La technique de recalage présentée ici consiste à trouver les paramètres du modèle numérique qui permettent de vérifier les trois équations.

Expérimentalement, la déformée modale est mesurée uniquement sur les directions d'observation (directions sensibles des capteurs). Une expansion de cette déformée sur le modèle numérique est nécessaire afin d'obtenir y_ν.

On convient de rendre les différentes équations associées à chaque mode à la même dimension. On aboutit alors au système d'équations suivant :

$$\frac{y_\nu^T B\,\bar{y}_\nu + 2\,\Re(s_\nu)\,y_\nu^T M\,\bar{y}_\nu}{|n_\nu|} = z_{1\nu}$$

$$\frac{s_\nu \bar{s}_\nu\, y_\nu^T M\,\bar{y}_\nu - y_\nu^T K\,\bar{y}_\nu}{|n_\nu s_\nu|} = z_{2\nu}$$

$$\frac{s_\nu^2\, y_\nu^T M y_\nu + s_\nu\, y_\nu^T B y_\nu + y_\nu^T K y_\nu}{n_\nu s_\nu} = z_{3\nu}$$

Pour plus de commodité, on choisit n_ν égale à la norme euclidienne de y_ν.

On dépose ensuite ces quantités dans les vecteurs Z_1, Z_2 et Z_3 afin de pouvoir définir la forme générale de la fonctionnelle ε à minimiser.

$$Z_1 = \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{1\nu} \\ \vdots \end{bmatrix} = Z_{1r}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{2\nu} \\ \vdots \end{bmatrix} = Z_{2r}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} \vdots \\ z_{3\nu} \\ \vdots \end{bmatrix} = Z_{3r} + j\,Z_{3i}$$

$$\varepsilon = \left(Z_{1r}^T W_1 Z_{1r}\right) + \left(Z_{1i}^T W_1 Z_{1i}\right) + \left(Z_{2r}^T W_2 Z_{2r}\right) + \left(Z_{3r}^T W_3 Z_{3r}\right)$$

Où W_1, W_1 et W_1 sont les pondérations associées aux différents blocs d’équations.

On note toutefois que la déformée modale doit être exprimée sur le modèle numérique. Elle est obtenue par expansion de la mesure sur le modèle numérique. On utilise généralement les modes du modèle numérique comme base d'expansion.

Une illustration de cette technique se trouve dans sdld21e.

4 Conseils pratiques

Avant d'effectuer une procédure de recalage, il est primordial de bien choisir les paramètres à recaler. Cela demande une réflexion de la part de l'utilisateur afin de saisir les bons paramètres qui ont un sens physique vis-à-vis de l'étude à mener.

Il faut également effectuer une étude de sensibilité de la fonctionnelle à minimiser par rapport aux paramètres à ajuster. En effet, il est inutile d'ajuster un paramètre qui ne fait pas varier la fonctionnelle. Si le paramètre est primordial pour l'étude mais la fonctionnelle est insensible à ce paramètre, alors il faut trouver une nouvelle fonctionnelle beaucoup plus adaptée.

Il faut également limiter le nombre de paramètres à recaler.

On peut distinguer deux grandes catégories de méthodes.

La première catégorie consiste à exploiter directement les grandeurs mesurées. Cela concerne les méthodes de type sensibilité.
La deuxième catégorie consiste à faire vérifier sur le modèle numérique les propriétés caractéristiques des modes propres, en substituant les modes propres calculés par les modes propres identifiés. On effectue une expansion de la déformée modale identifiée afin d'obtenir une grandeur définie sur le modèle numérique.

L'avantage de la première catégorie réside sur le fait qu'on exploite directement les données mesurées. L'inconvénient est qu'on est obligé d'effectuer un appariement entre le mode mesuré et le mode calculé analogue à chaque itération de la procédure de recalage. Cette technique n'est donc pas appropriée lorsque la densité modale est élevée.

L'avantage de la deuxième catégorie réside sur le fait qu'on ne fait ni un calcul modal sur le modèle numérique au cours des itérations de calcul ni un appariage entre le mode calculé et le mode mesuré. L'inconvénient est qu'on est obligé d'effectuer une expansion de la mesure sur le modèle numérique. Cette technique n'est donc pas appropriée lorsque que le nombre de points de mesure est réduit. Une deuxième itération de recalage après réactualisation du modèle numérique support est peut être nécessaire afin d'affiner les résultats. En effet, la réactualisation du modèle support permet d'améliorer la qualité de l'expansion modale.

Globalement, on peut tirer la conclusion suivante :

- Si la densité modale est élevée, l'exploitation des propriétés des matrices modales donne généralement de meilleurs résultats. Cela demande néanmoins une bonne répartition des points d'observation afin de pouvoir réaliser une meilleure expansion de la déformée modale.
- Si les modes de la structure sont des modes isolés, et qu'on est limité en nombre de points d'observation, alors la technique de type sensibilité est beaucoup plus appropriée pour l'ajustement du modèle numérique initial.

5 Bibliographie

[1] U4.73.02 : Macro-commande MACR_RECAL

[2] U4.52.15 : Opérateur MAC_MODES

[3] R4.03.06 : Algorithme de recalage

[4] H-T61-2008-04006-FR, I. NISTOR, Recalage en dynamique avec code_aster : synthèse théorique et spécifications de développement

[5] V2.03.121 : SDLS121 : Recalage des paramètres d'un modèle dynamique par analyse modale