

## SDLV100 - Vibration d'une poutre élancée de section rectangulaire variable (encastrée-libre)

---

### Résumé :

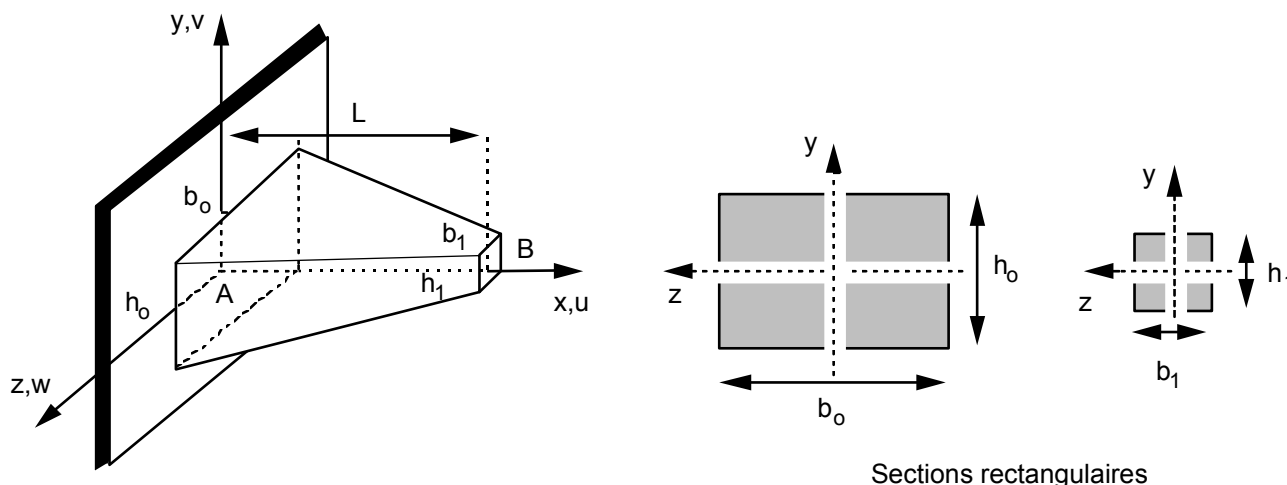
La structure étudiée est une poutre en acier encastrée libre à section variable rectangulaire modélisée par des éléments volumiques. On s'intéresse à ses fréquences propres en flexion. Le même problème est traité en modélisation poutre dans le cas test SDLL09.

Ce problème permet de tester les éléments volumiques `MECA_HEX20` et `MECA_PENTA15` en analyse modale. Il permet également de tester l'option `MASS_MECA_DIAG` de calcul des matrices de masse diagonalisées pour les modélisations volumiques.

La solution de référence est une solution numérique obtenue à l'aide du code de calcul par éléments finis SAMCEF pour des modélisations similaires. Les résultats obtenus sont également en bon accord avec les résultats semi-analytiques donnés dans le guide VPCS.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Longueur de la poutre :

$$L = 1 \text{ m}$$

Section rectangulaire :

	Section droite initiale	Section droite finale
hauteur :	$h_o = 0.04 \text{ m}$	$h_1 = 0.01 \text{ m}$
largeur :	$b_o = 0.04 \text{ m}$	$b_1 = 0.01 \text{ m}$
aire :	$A_o = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$	$A_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
inertie :	$Iz_o = 2.1333 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$	$Iz_1 = 8.3333 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$

Coordonnées des points (en mètres)

	A	B
x	0.	1.
y	0.	0.
z	0.	0.

### 1.2 Propriétés de l'acier

$$E = 2.10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Point A : encasté  $u = v = z = 0$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est obtenue à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis SAMCEF pour des modélisations identiques mais avec des matrices élémentaires de masse cohérentes.

On rappelle la solution analytique donnée dans la fiche SDLL09/89 du guide VPCS. L'équation différentielle en flexion de la poutre considérée, en théorie d'Euler-Bernoulli s'écrit (Théorie d'Euler-Bernoulli) :

$$\frac{\partial^2 \left( E I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

où  $I_z$  et  $A$  varient avec l'abscisse.

Les fréquences propres sont alors de la forme :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \lambda_i(\alpha, \beta) \frac{h_1}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}$$

avec  $\alpha = \frac{h_0}{h_1} = 4$  et  $\beta = \frac{b_0}{b_1} = 4$ .

Pour cette valeur de  $\alpha$  et  $\beta$ , les premières valeurs de la suite  $(\lambda_i)$  sont :

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\beta = 4$	23.289	73.9	165.23	299.7	478.1

### 2.2 Résultats de référence

Les résultats de référence retenus sont les 5 premières fréquences propres des modes de flexion.

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique en théorie de poutre de Bernoulli, et solution numérique SAMCEF.

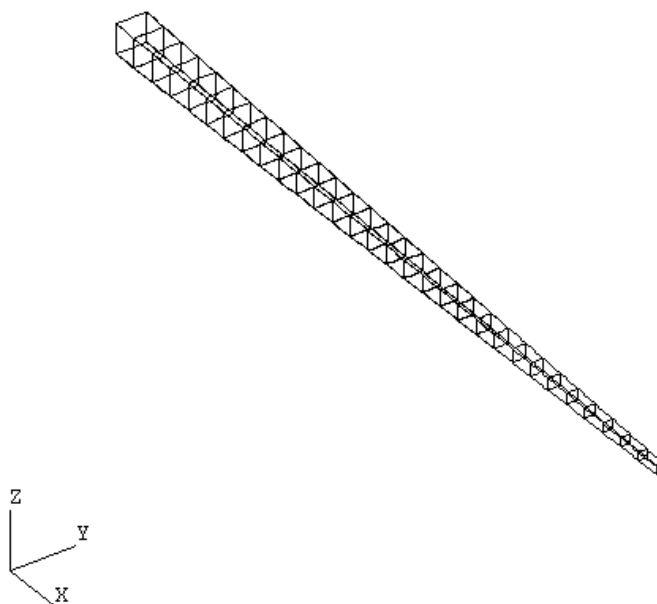
### 2.4 Références bibliographiques

- 1) H.H. MABIE, C.B. ROGERS, Transverse vibrations of double-tapered cantilever beams - Journal of the Acoustical Society of America, n° 51, p. 1771-1774 (1972).

## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments de volume MECA\_HEXA20



Discretisation : poutre AB : 30 mailles HEXA20  
(1 maille dans la section)

Conditions aux limites :

- en tous les nœuds DDL\_IMPO: ( TOUT:'OUI' DZ: 0.)
- à l'extrémité A (groupe de noeuds G\_1) ( GROUP\_NO : G\_1 DX: 0., DY: 0)

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Maillage : Nombre de nœuds : 368  
Nombre de mailles et type : 30 HEXA20

### 3.3 Valeurs testées

Identification	Solution poutre analytique	Référence SAMCEF	Aster	% différence Aster-SAMCEF
	fréquence	en HZ	en HZ	
matrice cohérente				
flexion 1	54.18	56.84	56.85	0.0176%
flexion 2	171.94	180.0	180.08	0.0444%
flexion 3	384.40	401.0	401.23	0.0574%

---

flexion 4	697.24	723.2	724.02	0.1134%
flexion 5	1112.28	1145.41	1147.51	0.1833%

---

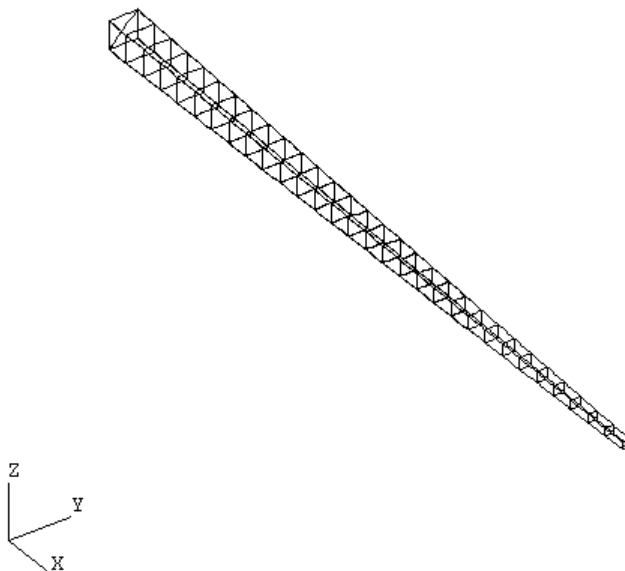
## matrice diagonale

flexion 1	54.18	56.84	56.78	-0.1033%
flexion 2	171.94	180.00	179.57	-0.2419%
flexion 3	384.40	401.00	399.24	-0.4408%
flexion 4	697.24	723.20	718.69	-0.6273%
flexion 5	1112.28	1145.41	1136.01	-0.8273%

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Eléments de volume MECA\_PENTA15



Discretisation : poutre *AB* : 60 mailles PENTA15  
(2 mailles dans la section)

Conditions aux limites :

- en tous les nœuds `DDL_IMPO: ( TOUT:'OUI' DZ: 0.)`
- à l'extrémité *A* (groupe de noeuds `G_1`) `( GROUP_NO : G_1 DX: 0., DY: 0)`

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Maillage : Nombre de nœuds : 368  
Nombre de mailles et type : 60 PENTA15

### 4.3 Valeurs testées

Identification	Solution poutre semi-analytique	Référence SAMCEF	Aster	% différence ASTER-SAMCEF
	fréquence	en HZ	en HZ	
matrice consistante				
flexion 1	54.18	56.84	56.82	-0.038%
flexion 2	171.94	180.00	179.96	-0.022%
flexion 3	384.40	401.00	400.93	-0.018%
flexion 4	697.24	723.20	723.41	0.029%
flexion 5	1112.28	1145.41	1146.41	0.088%

---

matrice diagonale

flexion 1	54.18	56.84	56.76	-0.149%
flexion 2	171.94	180.00	179.51	-0.272%
flexion 3	384.40	401.00	399.25	-0.437%
flexion 4	697.24	723.20	719.	-0.583%
flexion 5	1112.28	1145.41	1140.	-0.740%

## 5 Synthèse des résultats

---

Les écarts entre les résultats des calculs *Code\_Aster* et SAMCEF avec masses cohérentes sont inférieurs à 0.2%.

Les écarts entre les résultats de calculs *Code\_Aster* avec masses diagonales et SAMCEF avec masses cohérentes restent inférieurs à 1%.

Ces résultats sont conformes à ce que l'on pouvait attendre, et valident d'une manière fiable les calculs de fréquences propres dans *Code\_Aster* par `CALC_MODES` et l'opérateur `CALC_MATR_ELEM` en masses cohérentes comme en masses diagonales.