

## SDLV302 – Analyse modale par sous-structuration : poutre bi-appuyée

---

### Résumé :

Ce test valide l'analyse modale d'une structure par la méthode de sous-structuration dynamique. La structure étudiée est une poutre bi-appuyée déformable à l'effort tranchant. Elle est modélisée par des éléments volumes hexaédriques à 20 nœuds (modélisation 3D).

L'analyse modale est réalisée par trois méthodes :

- approche directe ;
- approche par sous-structuration dynamique de Craig-Bampton ;
- approche directe avec amortissement visqueux proportionnel.

Un intérêt particulier de ce test est la présence de relations linéaires entre plusieurs degrés de liberté.

Les fréquences propres calculées sont comparées à des valeurs obtenues analytiquement pour un modèle de poutre de Timoshenko déformable à l'effort tranchant et tenant compte de l'inertie rotatoire des sections.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

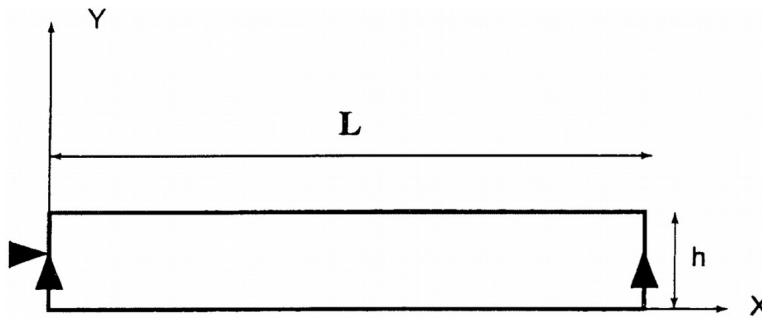


Figure 1.1-1 : Géométrie du problème

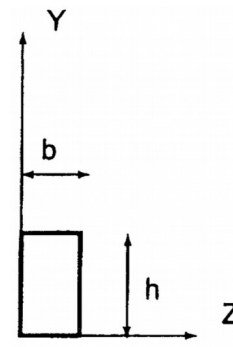


Figure 1.1-2 : Géométrie du problème

Hauteur :  $h=0.2$  m

Largeur :  $b=0.1$  m

Longueur :  $L=2$  m

Section :  $A=b \times h=0.02$  m

Inertie :  $I = \frac{b \times h^3}{12} = 1.66 \times 10^{-5}$  m

Coefficient de réduction de section  $k' = \frac{5}{6}$

### 1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young	$E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 7800.0$ kg.m <sup>-3</sup>
Module de glissement	$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.076 \times 10^{10}$ Pa

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

On autorise que la flexion dans le plan  $XY$  et l'extension le long de l'axe  $X$ . Le modèle étant volumique, les conditions aux limites diffèrent quelque peu de celles que l'on imposerait à un modèle poutre.

Déplacement imposé :

En $X=0$ , $Y=h/2$	$DX=0$ , $DY=0$
En $X=L$ , $Y=h/2$	$DY=0$

En $Z=b/2$	$DZ=0$
------------	--------

Aux conditions précédentes, on ajoute la contrainte de planéité des sections en  $X=0$  et  $X=L$ . Cette contrainte peut s'exprimer comme suit. Désignons par  $x^T=(X, Y, Z)$  le vecteur des coordonnées et par  $u^T=(DX, DY, DZ)$  le vecteur des déplacements; la position d'un point est repérée par le vecteur  $x'^T=x^T+u^T=(X', Y', Z')$ . Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non-alignés de la section. Un point quelconque  $P$  est astreint à la condition :

$$\begin{vmatrix} X'_P & Y'_P & Z'_P & 1 \\ X'_A & Y'_A & Z'_A & 1 \\ X'_B & Y'_B & Z'_B & 1 \\ X'_C & Y'_C & Z'_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est obtenue analytiquement pour une poutre de Timoshenko, prenant en compte la déformation à l'effort tranchant et l'inertie rotatoire des sections. Les aspects théoriques sont développés dans la référence donnée en 2.4.

Définissons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\Omega_n = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_n^2 \text{ valeurs propres}$$

$$j = \frac{I}{A L^2} \text{ inertie rotatoire}$$

$$g = \frac{EI}{k' A G L^2} \text{ coefficient de cisaillement}$$

Les fréquences propres des premiers modes de flexions sont données par l'expression suivante :

$$\Omega_n = \frac{(g+j)\lambda_n^2 + 1 - \sqrt{(g-j)^2 \lambda_n^4 + 2(g+j)\lambda_n^2 + 1}}{2 g j}$$

avec

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les fréquences des modes d'extension sont données par :

$$f_n = (2n-1) \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### 2.2 Résultats de référence

Mode	Forme	Fréquence ( Hz )
1	flexion	115.7
2	flexion	442.2
3	extension	648.6
4	flexion	931.6
5	flexion	1534.0

### 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

### 2.4 Références bibliographiques

ROBERT G., Solutions analytiques en dynamiques des structures, Rapport Samtech n° 121, Liège, 1996.



## 3 Modélisation A

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

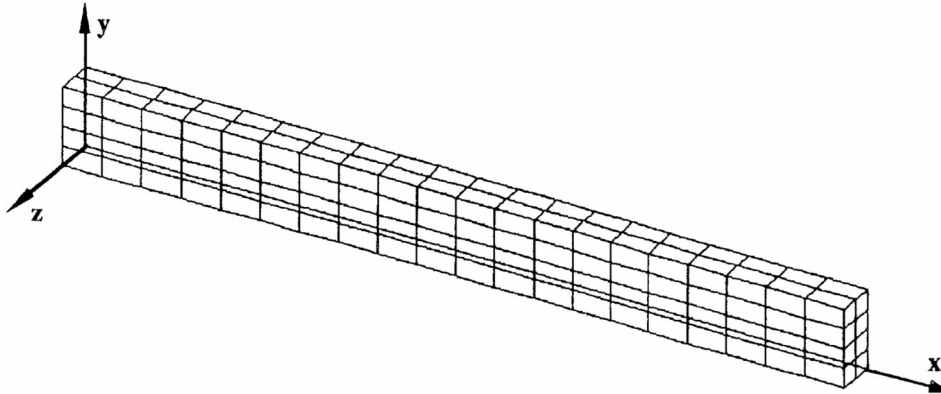


Figure 3.1-1 :Maillage de la géométrie du problème

Dans cette modélisation, la structure complète est maillée au moyen d'éléments volumiques 3D.

La contrainte de planéité s'exprime comme suit. Soient,

- le point A  $X=0, Y=h/2, Z=0$  :  $DX=DY=0, DZ \neq 0$  ;
- le point B  $X=0, Y=h/2, Z=b$  :  $DX=DY=0, DZ \neq 0$  ;
- le point C  $X=0, Y=h, Z=b/2$  :  $DX \neq DY \neq 0, DZ=0$

En négligeant les termes du second ordre dans les déplacements, la contrainte de planéité se traduit par une relation linéaire entre les déplacements  $DX=0$  des points A, B, C et P, un point quelconque de la face :

$$\begin{vmatrix} DX_P & Y_P & Z_P & 1 \\ DX_A & h/2 & 0 & 1 \\ DX_B & h/2 & b & 1 \\ DX_C & h & b/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La condition s'écrit alors pour  $DX_A=0$  :

$$DX_P = DX_C \times \left( \frac{2 Y_P}{h-1} \right)$$

En  $X=L$ , la condition de planéité s'obtient de façon analogue mais pour  $DX_A$  quelconque. La relation s'écrit alors :

$$DX_P = DX_C \times \left( \frac{2 Y_P}{h-1} \right) + 2 \times \left( 1 - \frac{Y_P}{h} \right) \times DX_A$$

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1077

Nombre de mailles et types : 160 HEXA20

### 3.3 Grandeurs testées et résultats

Mode	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
1	115.7	'ANALYTIQUE'	1.0
2	442.2	'ANALYTIQUE'	1.0
3	648.6	'ANALYTIQUE'	1.0
4	931.6	'ANALYTIQUE'	1.0
5	1534.0	'ANALYTIQUE'	1.0

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

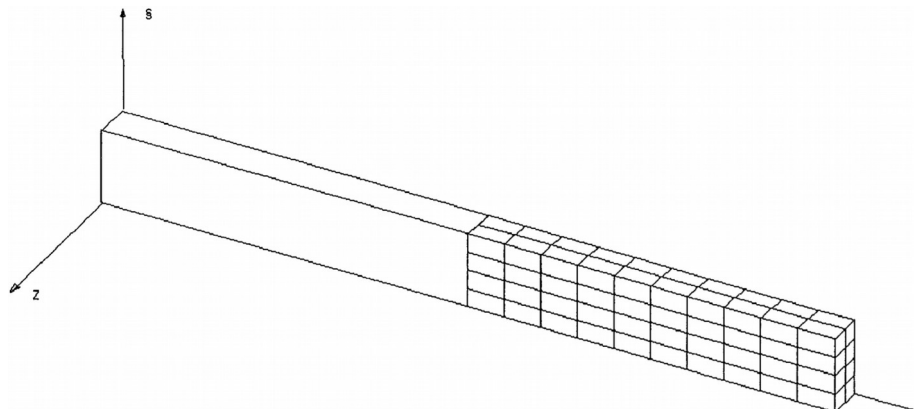


Figure 4.1-1 : Maillage de la géométrie du problème.

La poutre est divisée en deux parties égales. Chaque moitié est représentée par une sous-structure. Celles-ci sont générées par la méthode de Craig-Bampton. Sa base modale se compose des normaux à interface bloquées, au nombre de 10 et des modes statiques contraints relatifs aux points tels que  $X=L$  et  $Y=h/2$  (on ne considère en ces points que les degrés de liberté non fixés par les conditions aux limites).

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 557  
Nombre de mailles et types : 80 HEXA20

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

Mode	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
1	115.7	'ANALYTIQUE'	1.0
2	442.2	'ANALYTIQUE'	1.0
3	648.6	'ANALYTIQUE'	1.0
4	931.6	'ANALYTIQUE'	1.0
5	1534.0	'ANALYTIQUE'	1.0



## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Identique à la modélisation A avec ajout d'amortissement visqueux proportionnel tel que :

$$[C] = \alpha[K] + \beta[M]$$

avec

$$\alpha = 0.2852750549 \times 10^{-4} \text{ et } \beta = 57.62031174$$

On utilise la méthode de Lanczos (METHODE = 'TRI\_DIAG') pour calculer les modes propres.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation A.

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Tests de non-régression uniquement sauf pour la validation des options MATE\_ELGA et MATE\_ELEM.

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance
Champ MATE_ELGA, Maille MA000074, Point 1, Comp. RHO	1E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELEM, Maille MA000074, Comp. E	1E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELGA, Maille MA000081, Point 1, Comp. RHO	3E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELEM, Maille MA000081, Comp. E	3E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %

## 6 Modélisation D

---

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation D

Identique à la modélisation A avec ajout d'amortissement visqueux proportionnel tel que :

$$[C] = \alpha [K] + \beta [M]$$

avec,

$$\alpha = 1.14110022 \times 10^{-4} \text{ et } \beta = 230.4812469$$

On utilise la méthode de Sorensen (METHODE = 'SORENSEN') pour calculer les modes propres.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation A.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

Tests de non-régression uniquement.

## 7 Synthèse des résultats

---

La modélisation A permet de valider le calcul des modes propres par rapport à une solution de référence obtenue analytiquement ; l'erreur maximale est de moins de 0.5 %.

La modélisation B valide la sous-structuration dynamique avec interface de Craig-Bampton. L'erreur relative entre les modélisations A et B est nulle.