

## SSLS126 – Flexion d'une dalle en béton armé (modèle GLRC\_DAMAGE) appuyée sur deux cotés: régime de poutre élastique

---

### Résumé :

Ce test représente le calcul d'une dalle en béton armé, en flexion, soumise à une pression. Il permet de valider la modélisation DKTG avec le modèle GLRC\_DAMAGE pour le comportement élastique linéaire et la modélisation Q4GG avec le modèle ELAS. La dalle est en configuration poutre : appuis simples sur deux côtés opposés de la dalle.

Quatre modélisations sont effectuées :

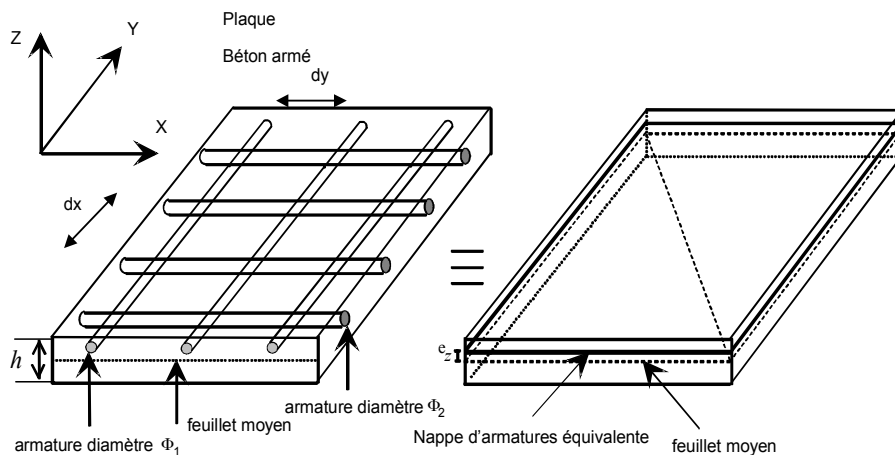
- Modélisation A permet de tester le modèle DKTG avec des TRIA3,
- Modélisation B permet de tester le modèle DKTG avec des QUAD4.
- Modélisation C permet de tester le modèle Q4GG avec des TRIA3,
- Modélisation D permet de tester le modèle Q4GG avec des QUAD4.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Il s'agit d'une dalle carrée, de longueur  $l=1.8\text{ m}$ , d'épaisseur  $h=0.12\text{ m}$ , sur appuis simples bilatéraux. Le ferrailage de flexion est parallèle aux bords ; il est identique sur chacune des deux faces et dans chacun des deux sens ( $dx$ ,  $dy$  étant les espacements des fers dans les directions  $x$  et  $y$ ). L'enrobage des fers longitudinaux les plus proches des faces est de  $22\text{ mm}$ . L'enrobage des fers par rapport aux bords latéraux de la dalle de  $2\text{ cm}$  est négligé. Le tableau ci-après récapitule les données du ferrailage. Le pourcentage géométrique d'acier  $\mu$  est donné pour une face dans un sens.

Diamètre des armatures	Espacement	Section acier/section du béton	distance grille/surface moyenne de la dalle
$\Phi=0,01\text{ m}$	$dx=dy=0,1\text{ m}$	$\mu=0,65$	$e_s=\pm 0,038\text{ m}$



On note  $a_x = \frac{A_x}{d_x}$ ,  $a_y = \frac{A_y}{d_y}$  les taux de ferrailage (ici :  $a_x = a_y = 7,854 \cdot 10^{-4}\text{ m}$ ),  $A_x$  ( $A_y$ ) étant la section d'une barre de fer dans la direction  $x$  ( $y$ ) ;  $e_z$  la distance des nappes à la surface moyenne.

### 1.2 Propriétés de matériaux

Les caractéristiques des aciers sont les suivantes :

Module d'Young $E_a$	Coefficient de Poisson	Limite élastique à 0.2 % $\sigma_y$	Limite de rupture $\sigma_r$	Pente d'écroutissage	Allongement à rupture
210000 MPa	0,3	500 MPa	570 MPa	473 MPa	15%

Celles du béton sont les suivantes :

Module d'Young $E_b$	Coefficient de Poisson	Résistance en compression, $\sigma_c$	Résistance en traction, $\sigma_t$
35700 MPa	0,22	52,5 MPa	4,4 MPa

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions aux limites se résument à des appuis simples : déplacement vertical bloqué et rotations libres sur deux bords en vis à vis, les deux autres bords restant libres.

Pression uniforme :  $p = 0.01 \text{ MPa}$

## 1.4 Conditions initiales

Sans objet.

## 2 Solution de référence

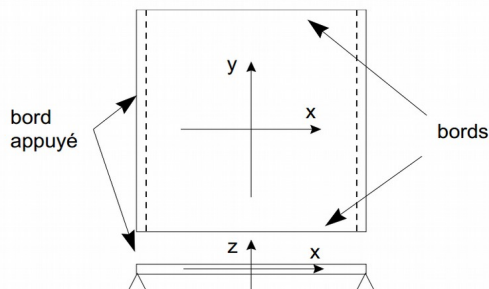
### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les relations élastiques, reliant les efforts membranaires  $N$  et de flexion  $M$  aux déformations membranaires  $\varepsilon$  et les courbures  $\kappa$  et tenant compte de deux grilles symétriques, s'écrivent :

$$N = \left( \frac{E_b h}{1 - \nu_b^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \varepsilon$$

$$M = \left( \frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_b & 0 \\ \nu_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_b}{2} \end{bmatrix} + 2 E_a e_z^2 \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \kappa$$

S'agissant d'une configuration poutre, on affecte au béton un coefficient de Poisson égal à 0 pour annuler toute flexion dans la direction perpendiculaire. Deux bords opposés de la dalle sont simplement appuyés, deux autres restant libres :



La raideur de flexion équivalente qui tient compte des aciers est :

$$(EI)_{\text{éq}} = \frac{E_b l h^3}{12} + 2 E_a a_x l e_z^2,$$

soit ici :  $(EI)_{\text{éq}} = 10.111 \text{ MNm}^2$ .

La solution élastique se calcule en théorie de poutres pour une valeur de pression équivalente  $p' = pl$ . On obtient les valeurs des moments en configuration « plaque » par division par la largeur de la dalle  $l$ .

Grandeur au centre	Expression
Flèche au centre sous pression surfacique	$w(l/2) = \frac{5 p' l^4}{384 (EI)_{\text{éq}}}$
Courbure	$\kappa_{xx}(l/2) = \frac{p' l^2}{8 (EI)_{\text{éq}}}$
Deformation	$\varepsilon_{xx} = \kappa_{xx} \frac{h}{2}$
Moment global (en poutre)	$M(l/2) = p' l^2 / 8$
Moment global (en plaque)	$M(l/2) = p l^2 / 8$

## 2.2 Résultats de référence

Pour les modélisations A et B dans lesquelles on valide la loi `GLRC_DAMA` avec les éléments `DKTG` :

- Flèche au centre sous pression surfacique :  $w = 2,433 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- Courbure :  $k = 7,210 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$
- Déformation:  $\varepsilon_{xx} = -0.4326 \cdot 10^{-4}$  sur la peau inférieure
- Moment global (en poutre) :  $M = 7290 \text{ Nm}$
- Moment global (en plaque) :  $M = 4050 \text{ Nm/ml}$
- 

Pour les modélisations C et D dans lesquelles on valide la loi `ELAS` avec les éléments `Q4GG` :

- Flèche au centre sous pression surfacique :  $w = 2,658 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- Courbure :  $k = 7,878 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$
- Déformation:  $\varepsilon_{xx} = -0.47269 \cdot 10^{-4}$  sur la peau inférieure
- Moment global (en poutre) :  $M = 7290 \text{ Nm}$
- Moment global (en plaque) :  $M = 4050 \text{ Nm/ml}$

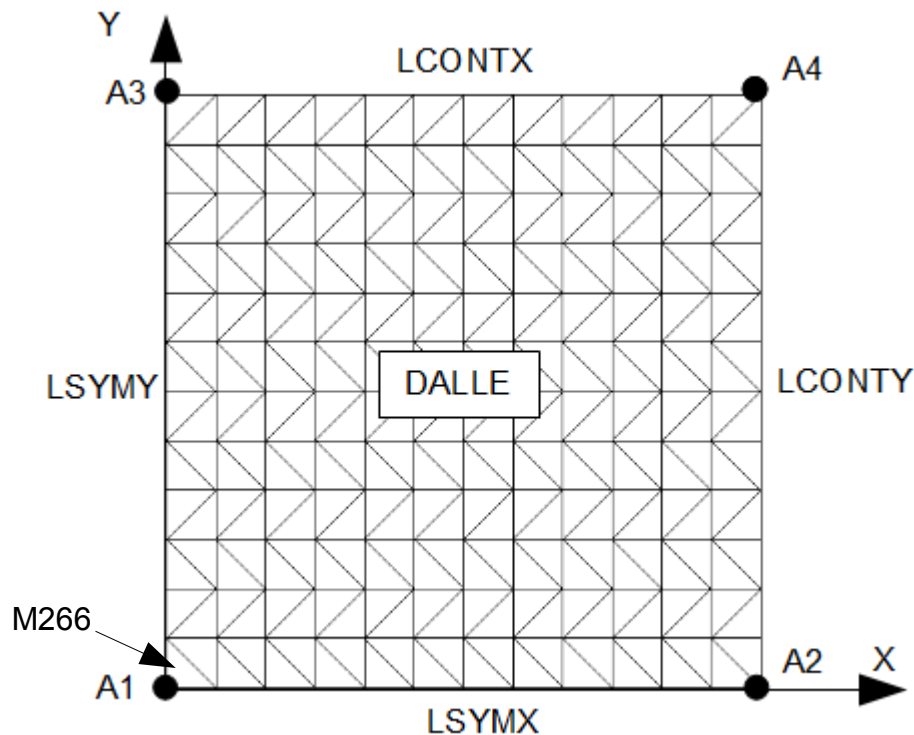
## 2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

## 2.4 Référence bibliographique

- [1] KOECHLIN P., MOULIN S., " Modèle de comportement global des plaques en béton armé sous chargement dynamique de flexion : Loi GLRC", Note EDF/R&D/AMA HT-62/01/028A.

## 3 Modélisation A



### 3.1 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169  
Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

### 3.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.433 \cdot 10^{-4}$	6 %
$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	2 %
$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.21 \cdot 10^{-4}$	5 %

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$MXX$ M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	4044.16	1.e-6
$KXX$ M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	$7.1996 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

- Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques  $\alpha=33^\circ$  et  $\beta=12^\circ$ .

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>DZ</i> (AI)	'ANALYTIQUE'	2.433 10 <sup>-4</sup>	6 %
<i>MXX</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	2847.47	1.e-6
<i>MYX</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	1198.15	1.e-6
<i>MYX</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	-1852.21	1.e-6
<i>KXX</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	5.0692 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KYY</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	2.1330 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KXY</i> (AI)	'NON_REGRESSION'	-3.2974 10 <sup>-4</sup>	1.e-6

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>MXX</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	2842.56	1.e-6
<i>MYX</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	1197.70	1.e-6
<i>MYX</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	-1849.40	1.e-6
<i>KXX</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	5.0605 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KYY</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	2.1322 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KXY</i> M266 Point 3	'NON_REGRESSION'	-3.2924 10 <sup>-4</sup>	1.e-6

### 3.3 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticité suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec  $\nu_b=0$  :

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Matrice d'élasticité en membrane : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{array} \right\} 10^6 N/m \\
 2) \text{ Matrice d'élasticité en flexion : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{array} \right\} 10^6 N/m
 \end{aligned}$$

Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

Limites élastiques en flexion positive :

$$\begin{aligned}
 \text{Direction } x : & \quad 1.10^{10} MNm/ml \\
 \text{Direction } y : & \quad 1.10^{10} MNm/ml
 \end{aligned}$$

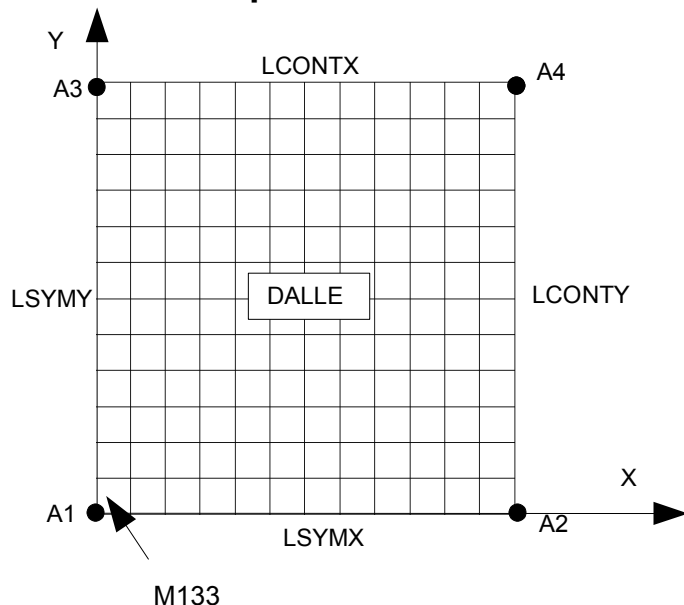
Limites élastiques en flexion négative :

$$\begin{aligned}
 \text{Direction } x : & \quad -1.10^{10} MNm/ml \\
 \text{Direction } y : & \quad -1.10^{10} MNm/ml
 \end{aligned}$$

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

## 4 Modélisation B

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation DKTG (QUAD4)

- Conditions aux limites:
  - . Coté  $A2A4$  :  $DZ=0$
- Conditions de symétrie
  - . Coté  $A1A2$  :  $DY=DRX=0$
  - . Coté  $A1A3$  :  $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ( $X=0$ ) et ( $Y=0$ ), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169  
Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

### 4.3 Fonctionnalités testées

La macro-commande `POST_COQUE` permet d'extraire les efforts et les déformations en un point quelconque de la coque.

### 4.4 Valeurs testées

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.433 \cdot 10^{-4}$	6 %
$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	2 %
$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.21 \cdot 10^{-4}$	5 %

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$MXX$ M133 Point 4	'NON_REGRESSION'	4044.05	1.e-6
$KXX$ M133 Point 4	'NON_REGRESSION'	$7.1995 \cdot 10^{-4}$	1.e-6



- Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques  $\alpha=33^\circ$  et  $\beta=12^\circ$ .

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>DZ (AI)</i>	'ANALYTIQUE'	$2.433 \cdot 10^{-4}$	6 %
<i>MXX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	2848.64	1.e-6
<i>MYY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	1201.35	1.e-6
<i>MXY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	-1849.92	1.e-6
<i>KXX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	$5.0713 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
<i>KYY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	$2.1387 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
<i>KXY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	$-3.2933 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>MXX MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	2844.46	1.e-6
<i>MYY MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	1199.59	1.e-6
<i>MXY MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	-1847.21	1.e-6
<i>KXX MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	$5.0639 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
<i>KYY MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	$2.1356 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
<i>KXY MI33 Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	$-3.2885 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

## 4.5 Remarques

Les coefficients des matrices d'élasticités suivantes, utilisés lors des calculs, ont été calculés avec  $\nu_b=0$  :

$$\begin{aligned}
 1) \text{ Matrice d'élasticité en membrane : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 4614. & 0 & 0 \\ 0 & 4614. & 0 \\ 0 & 0 & 2142. \end{array} \right\} 10^6 \text{ N/m} \\
 2) \text{ Matrice d'élasticité en flexion : } & \left\{ \begin{array}{ccc} 5.617 & 0 & 0 \\ 0 & 5.617 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{array} \right\} 10^6 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

Pour être certain de rester dans le domaine élastique, les limites élastiques exprimées dans le repère d'orthotropie, sont fixées arbitrairement à une valeur très élevée:

Limites élastiques en flexion positive :

$$\text{Direction } x : 1.10^{10} \text{ MNm/ml}$$

$$\text{Direction } y : 1.10^{10} \text{ MNm/ml}$$

Limites élastiques en flexion négative :

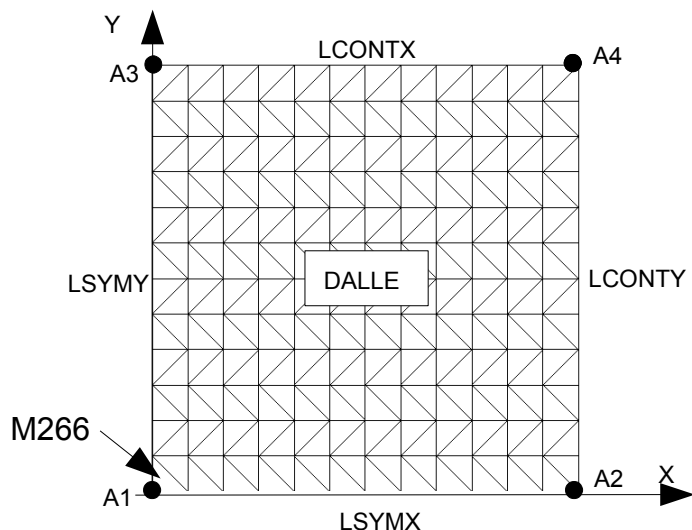
$$\text{Direction } x : -1.10^{10} \text{ MNm/ml}$$

$$\text{Direction } y : -1.10^{10} \text{ MNm/ml}$$

Comme la structure reste dans le domaine élastique, le coefficient de rappel cinématique (constante de Prager) peut prendre une valeur quelconque.

## 5 Modélisation C

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (TRIA3)

- Conditions aux limites:
  - . Coté  $A2A4$  :  $DZ=0$
- Conditions de symétrie
  - . Coté  $A1A2$  :  $DY=DRX=0$
  - . Coté  $A1A3$  :  $DX=DRY=0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ( $X=0$ ) et ( $Y=0$ ), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169  
Nombre de mailles et type : 288 TRIA3

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.658 \cdot 10^{-4}$	1 %
$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	0.5 %
$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.878 \cdot 10^{-4}$	0.5 %

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$MXX$ $M266$ Point 1	'NON_REGRESSION'	4032.58	1.e-6
$KXX$ $M266$ Point 1	'NON_REGRESSION'	$7.8442 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

- Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques  $\alpha=33^\circ$  et  $\beta=12^\circ$ .

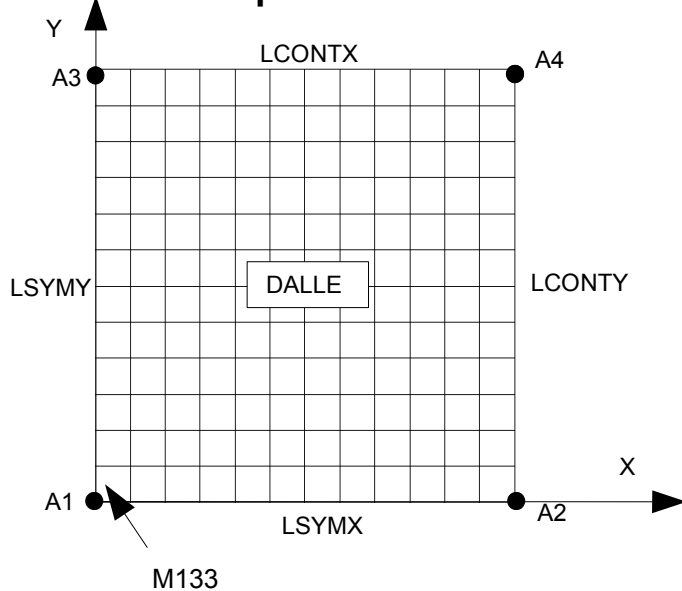
Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>DZ (AI)</i>	'ANALYTIQUE'	2.658 10 <sup>-4</sup>	1 %
<i>MXX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	2836.04	1.e-6
<i>MYX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	1195.36	1.e-6
<i>MYX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	-1842.50	1.e-6
<i>KXX (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	5.5167 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KYY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	2.3252 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KXY (AI)</i>	'NON_REGRESSION'	-3.5840 10 <sup>-4</sup>	1.e-6

	Identification		Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>MXX</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	2836.04	1.e-6
<i>MYX</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	1195.36	1.e-6
<i>MYX</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	-1842.50	1.e-6
<i>KXX</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	5.5167 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KYY</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	2.3252 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KXY</i>	<i>M266</i>	<i>Point 1</i>	'NON_REGRESSION'	-3.5840 10 <sup>-4</sup>	1.e-6

## 5.4 Remarques

## 6 Modélisation D

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation



Modélisation Q4GG (QUAD4)

- Conditions aux limites:
  - . Coté  $A2A4$  :  $DZ = 0$
- Conditions de symétrie
  - . Coté  $A1A2$  :  $DY = DRX = 0$
  - . Coté  $A1A3$  :  $DX = DRY = 0$

La dalle est symétrique par rapport aux plans ( $X=0$ ) et ( $Y=0$ ), les calculs sont effectués sur un quart de la dalle.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 169  
Nombre de mailles et type : 144 QUAD4

### 6.3 Fonctionnalités testées

La macro-commande `POST_COQUE` permet d'extraire les efforts et les déformations en un point quelconque de la coque.

### 6.4 Valeurs testées

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.658 \cdot 10^{-4}$	1 %
$MXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	4050.	0.5 %
$KXX(A1)$	'ANALYTIQUE'	$7.878 \cdot 10^{-4}$	0.5 %

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$MXX$ $M133$ $Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	4035.93	1.e-6
$KXX$ $M133$ $Point\ 4$	'NON_REGRESSION'	$7.8507 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

- Les grandeurs sont exprimées dans le repère défini par les angles nautiques  $\alpha = 33^\circ$  et  $\beta = 12^\circ$ .

Identification	Type de référence	Référence	Tolérance (%)
$DZ(A1)$	'ANALYTIQUE'	$2.658 \cdot 10^{-4}$	1 %
$MXX(A1)$	'NON_REGRESSION'	2838.75	1.e-6
$MYY(A1)$	'NON_REGRESSION'	1197.18	1.e-6
$MXY(A1)$	'NON_REGRESSION'	-1843.50	1.e-6
$KXX(A1)$	'NON_REGRESSION'	$5.5220 \cdot 10^{-4}$	1.e-6
$KYY(A1)$	'NON_REGRESSION'	$2.3287 \cdot 10^{-4}$	1.e-6

---

<i>KXY</i> ( <i>A1</i> )	'NON_REGRESSION'	-3.5860 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
--------------------------	------------------	--------------------------	-------

---

Identification			Type de référence	Référence	Tolérance (%)
<i>MXX</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	2838.75	1.e-6
<i>MYY</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	1197.18	1.e-6
<i>MX Y</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	-1843.50	1.e-6
<i>KXX</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	5.5220 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KYY</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	2.3287 10 <sup>-4</sup>	1.e-6
<i>KXY</i>	<i>M133</i>	<i>Point 4</i>	'NON_REGRESSION'	-3.5860 10 <sup>-4</sup>	1.e-6

## 6.5 Remarques

## 7 Synthèse des résultats

---

Les résultats des quatre modélisations sont proches de la solution analytique :

- DKTG : au maximum 6% d'écart pour les déplacements, et 5% pour le moment et la courbure.
- Q4GG : au maximum 1% d'écart pour les déplacements, et 0.5% pour le moment et la courbure.

Ces modélisations valident :

- la modélisation DKTG avec le modèle `GLRC_DAMAGE` en comportement élastique.
- la modélisation Q4GG avec le modèle `ELAS`.