

## SSNP303 - Élément en contrainte plane et traction - Plasticité parfaite

---

### Résumé :

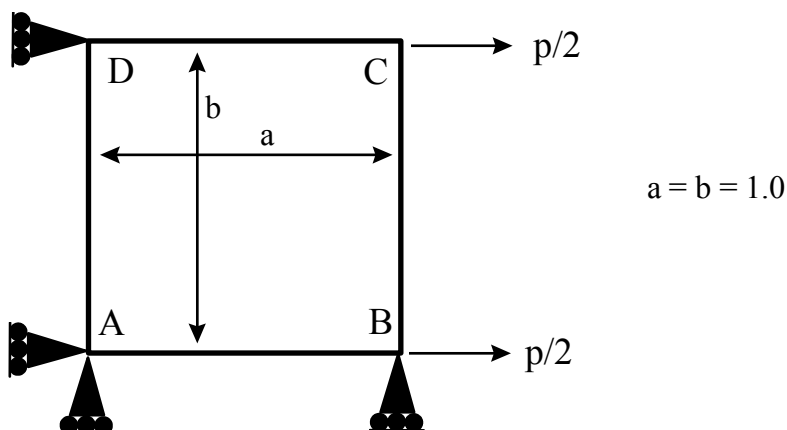
Ce test de mécanique quasi-statique non linéaire 2D consiste à charger trois éléments de plaque superposés (type d'élément MECPOU4). Les 4 nœuds sont communs aux 3 éléments. Les éléments ont des propriétés différentes (plasticité parfaite) pour obtenir une courbe de traction convenable. Ce test est tiré du guide NAFEMS.

Le but est de comparer les différentes méthodes de type Newton-Raphson permettant de résoudre le système d'équations non linéaires (NEWTON : (MATRICE 'ELASTIQUE') et NEWTON : (MATRICE 'TANGENTE')) avec REAC\_INCR et REAC\_ITER). Le critère de convergence choisi correspond à 0.01% de la force résiduelle (RESI\_GLOB\_RELA).

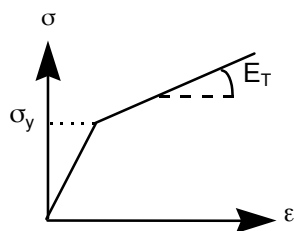
La modélisation est effectuée avec des éléments plans de type MECPOU4.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



### 1.2 Propriétés de matériaux



| Matériau 1                 | Matériau 2                 | Matériau 3                 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $E = 100000 \text{ MPa}$   | $E = 60000 \text{ MPa}$    | $E = 40000 \text{ MPa}$    |
| $\nu = 0.25$               | $\nu = 0.25$               | $\nu = 0.25$               |
| $\sigma_y = 3 \text{ MPa}$ | $\sigma_y = 6 \text{ MPa}$ | $\sigma_y = 8 \text{ MPa}$ |
| $E_T = 0.0$                | $E_T = 0.0$                | $E_T = 0.0$                |

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

Point  $A$  :  $u_x = 0$ .

$u_y = 0$ .

Point  $B$  :  $u_y = 0$ .

Point  $D$  :  $u_x = 0$ .

Chargement par une force  $P/2$  sur le point  $B$  et  $C$ . La force  $P$  est augmentée en 6 étapes de la manière suivante :

|           |      |      |      |       |       |       |
|-----------|------|------|------|-------|-------|-------|
| Force $P$ | 3.00 | 6.00 | 9.00 | 12.95 | 15.00 | 16.93 |
|-----------|------|------|------|-------|-------|-------|

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Les résultats considérés comme référence ont été obtenus par SAMCEF en utilisant 60 incréments pour chaque étape de chargement. Les caractéristiques des différentes méthodes de résolution sont les suivantes :

- A Utilisation de la matrice élastique.
- B Utilisation de la matrice tangente ; celle-ci n'est réévaluée qu'à la première itération de chaque incrément (REAC\_INCR = 1 et REAC\_ITER = 0). Il s'agit de la méthode de Newton modifiée.
- C Utilisation de la matrice tangente ; celle-ci est réévaluée à chaque itération de chaque incrément (REAC\_INCR = 1 et REAC\_ITER = 1). Il s'agit de la méthode de Newton classique.

### 2.2 Résultats de référence

Résultats obtenus avec 60 incréments pour chaque étape de chargement

| Force | Elément 1     |               | Elément 2     |               | Elément 3     |               |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|       | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ | $\sigma^{xx}$ | $\sigma^{yy}$ |
| 3.00  | 1.500000D+00  | 6.938894D-18  | 9.000000D-01  | -1.040834D-17 | 6.000000D-01  | -6.938894D-18 |
| 6.00  | 3.000000D+00  | 4.861944D-13  | 1.800000D+00  | -2.081668D-17 | 1.200000D+00  | -3.469447D-18 |
| 9.00  | 3.147155D+00  | 3.199571D-01  | 3.511707D+00  | -1.900098D-01 | 2.341138D+00  | -1.279828D-01 |
| 12.95 | 3.252919D+00  | 5.950074D-01  | 5.814267D+00  | -3.523377D-01 | 3.878832D+00  | -2.380030D-01 |
| 15.00 | 3.213822D+00  | 4.873069D-01  | 6.017834D+00  | 3.174572D-02  | 5.768340D+00  | -5.231355D-01 |
| 16.93 | 3.209297D+00  | 4.753345D-01  | 6.149462D+00  | 3.048490D-01  | 7.571241D+00  | -7.863557D-01 |

### 2.3 Incertitude sur la solution

Incertitude inférieure à 1 % .

### 2.4 Références bibliographiques

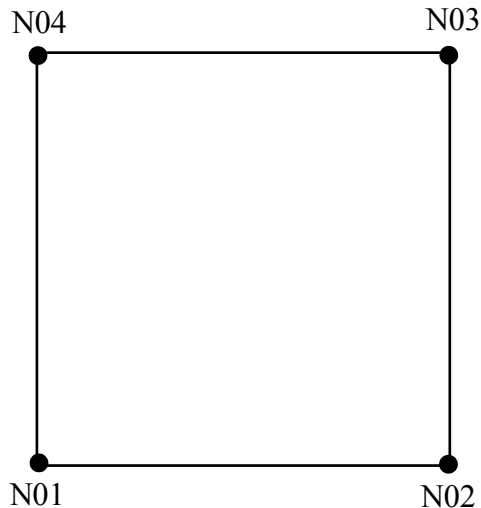
- 1) Fundamental tests for two and three dimensional, small strain, elastoplastic finite element analysis, 1987, NAFEMS

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Utilisation des éléments QUAD4



Modélisation en contraintes planes : C\_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO : ( Noeud NO1 DX = 0 , DY = 0 )  
( Noeud NO2 DX = 0 , DY = 0 )  
( Noeud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux noeuds NO2 et NO3 .

### 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 3 MEC PQU4

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification           | Instant | Référence     | Aster         | % différence |
|--------------------------|---------|---------------|---------------|--------------|
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 1       | 1,500000E+00  | 1,500000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 1       | 6,938894E-18  | 1,291047E-14  | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 1       | 9,000000E-01  | 9,000000E-01  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 1       | -1,040834E-17 | -1,509903E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 1       | 6,000000E-01  | 6,000000E-01  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 1       | -6,938894E-18 | -2,107830E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 2       | 3,000000E+00  | 3,000000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 2       | 4,861944E-13  | 1,359551E-13  | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 2       | 1,800000E+00  | 1,800000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 2       | -2,081668E-17 | -1,093097E-13 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 2       | 1,200000E+00  | 1,200000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 2       | -3,469447E-18 | -1,007126E-13 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,147155E+00  | 3,145788E+00  | -0,043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,199571E-01  | 3,167040E-01  | -1,017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 3       | 3,511707E+00  | 3,512527E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 3       | -1,900098E-01 | -1,900224E-01 | 0,007        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 3       | 2,341138E+00  | 2,341685E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 3       | -1,279828E-01 | -1,266816E-01 | -1,017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 4       | 3,252919E+00  | 3,250728E+00  | -0,067       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 4       | 5,950074E-01  | 5,887464E-01  | -1,052       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 4       | 5,814267E+00  | 5,816159E+00  | 0,033        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 4       | -3,523377E-01 | -3,521695E-01 | -0,048       |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 4       | 3,878832E+00  | 3,882391E+00  | 0,092        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 4       | -2,380030E-01 | -2,364650E-01 | -0,646       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 5       | 3,213822E+00  | 3,214367E+00  | 0,017        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 5       | 4,873069E-01  | 4,887527E-01  | 0,297        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 5       | 6,017834E+00  | 6,015985E+00  | -0,031       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 5       | 3,174572E-02  | 3,209818E-02  | 1,11         |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 5       | 5,768340E+00  | 5,769681E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 5       | -5,231355E-01 | -5,207413E-01 | -0,458       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 6       | 3,209297E+00  | 3,210194E+00  | 0,028        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 6       | 4,753345E-01  | 4,777143E-01  | 0,501        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 6       | 6,149462E+00  | 6,146791E+00  | -0,043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 6       | 3,048490E-01  | 3,052330E-01  | 0,126        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 6       | 7,571241E+00  | 7,572486E+00  | 0,016        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 6       | -7,863557E-01 | -7,826545E-01 | -0,471       |

## 3.4 Remarques

Pour obtenir une précision correcte, il faut imposer un nombre important d'incrémentes pour chaque étape de chargement ( 60 incrémentes ).

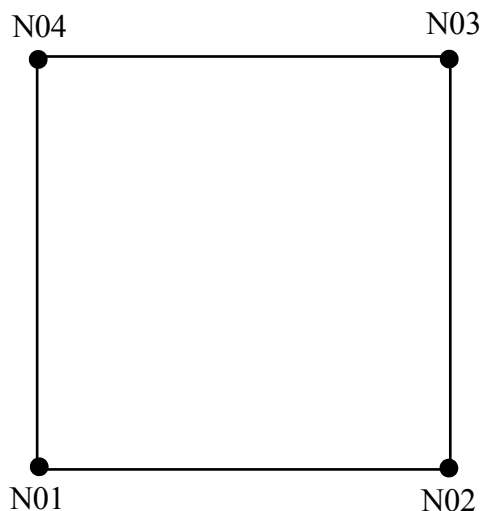
Le nombre d'itérations est égal à 411.

## 4 Modélisation B

---

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Utilisation des éléments QUAD4



### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 3 MECPQU4

Modélisation en contraintes planes : C\_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO : ( Nœud NO1 DX = 0 , DY = 0 )  
( Nœud NO2 DX = 0 , DY = 0 )  
( Nœud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux nœuds NO2 et NO3 .

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification           | Instant | Référence     | Aster         | % différence |
|--------------------------|---------|---------------|---------------|--------------|
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 1       | 1,500000E+00  | 1,500000E+00  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 1       | 6,938894E-18  | 1,351398E-14  | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 1       | 9,000000E-01  | 9,000000E-01  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 1       | -1,040834E-17 | -2,142673E-14 | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 1       | 6,000000E-01  | 6,000000E-01  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 1       | -6,938894E-18 | -2,924612E-14 | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 2       | 3,000000E+00  | 3,000000E+00  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 2       | 4,861944E-13  | 9,617834E-14  | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 2       | 1,800000E+00  | 1,800000E+00  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 2       | -2,081668E-17 | -8,301280E-14 | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 2       | 1,200000E+00  | 1,200000E+00  | 0.000        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 2       | -3,469447E-18 | -9,360717E-14 | 0.000        |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,147155E+00  | 3,145788E+00  | -0.043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,199571E-01  | 3,167038E-01  | -1.017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 3       | 3,511707E+00  | 3,512527E+00  | 0.023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 3       | -1,900098E-01 | -1,900225E-01 | 0.007        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 3       | 2,341138E+00  | 2,341685E+00  | 0.023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 3       | -1,279828E-01 | -1,266817E-01 | -1.017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 4       | 3,252919E+00  | 3,250686E+00  | -0.069       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 4       | 5,950074E-01  | 5,886265E-01  | -1.072       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 4       | 5,814267E+00  | 5,816233E+00  | 0.034        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 4       | -3,523377E-01 | -3,520332E-01 | -0.086       |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 4       | 3,878832E+00  | 3,883081E+00  | 0.110        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 4       | -2,380030E-01 | -2,365921E-01 | -0.593       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 5       | 3,213822E+00  | 3,214343E+00  | 0.016        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 5       | 4,873069E-01  | 4,886891E-01  | 0.284        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 5       | 6,017834E+00  | 6,015971E+00  | -0.031       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 5       | 3,174572E-02  | 3,207056E-02  | 1.023        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 5       | 5,768340E+00  | 5,769686E+00  | 0.023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 5       | -5,231355E-01 | -5,207599E-01 | -0.454       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 6       | 3,209297E+00  | 3,210140E+00  | 0.026        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 6       | 4,753345E-01  | 4,775720E-01  | 0.471        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 6       | 6,149462E+00  | 6,146788E+00  | -0.043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 6       | 3,048490E-01  | 3,052260E-01  | 0.124        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 6       | 7,571241E+00  | 7,573072E+00  | 0.024        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 6       | -7,863557E-01 | -7,827984E-01 | -0.452       |



## 4.4 Remarques

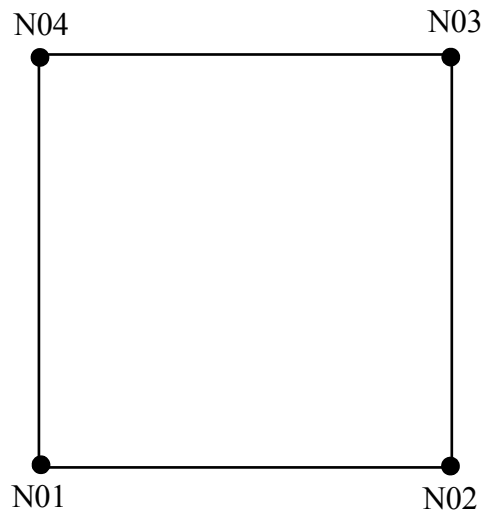
Idem modélisation A concernant le nombre d'incrémentes sur la précision des résultats.  
Le nombre d'itérations est égal à 361.

## 5 Modélisation C

---

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Utilisation des éléments QUAD4



### 5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4

Nombre de mailles et types : 3 MEC PQU4

Modélisation en contraintes planes : C\_PLAN

Le chargement et les conditions aux limites sont modélisés par :

- DDL\_IMPO : ( Noeud NO1 DX = 0 , DY = 0 )  
( Noeud NO2 DX = 0 , DY = 0 )  
( Noeud NO4 DX = 0 )
- des forces imposées aux nœuds NO2 et NO3 .

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

| Identification           | Instant | Référence     | Aster         | % différence |
|--------------------------|---------|---------------|---------------|--------------|
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 1       | 1,500000E+00  | 1,500000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 1       | 6,938894E-18  | 1,351398E-14  | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 1       | 9,000000E-01  | 9,000000E-01  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 1       | -1,040834E-17 | -2,142673E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 1       | 6,000000E-01  | 6,000000E-01  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 1       | -6,938894E-18 | -2,924612E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 2       | 3,000000E+00  | 3,000000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 2       | 4,861944E-13  | 9,617834E-14  | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 2       | 1,800000E+00  | 1,800000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 2       | -2,081668E-17 | -8,301280E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 2       | 1,200000E+00  | 1,200000E+00  | 0            |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 2       | -3,469447E-18 | -9,360717E-14 | 0            |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,147155E+00  | 3,145788E+00  | -0,043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 3       | 3,199571E-01  | 3,167040E-01  | -1,017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 3       | 3,511707E+00  | 3,512527E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 3       | -1,900098E-01 | -1,900224E-01 | 0,007        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 3       | 2,341138E+00  | 2,341685E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 3       | -1,279828E-01 | -1,266816E-01 | -1,017       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 4       | 3,252919E+00  | 3,250686E+00  | -0,069       |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 4       | 5,950074E-01  | 5,886268E-01  | -1,072       |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 4       | 5,814267E+00  | 5,816233E+00  | 0,034        |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 4       | -3,523377E-01 | -3,520328E-01 | -0,087       |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 4       | 3,878832E+00  | 3,883081E+00  | 0,11         |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 4       | -2,380030E-01 | -2,365919E-01 | -0,593       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 5       | 3,213822E+00  | 3,214343E+00  | 0,016        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 5       | 4,873069E-01  | 4,886892E-01  | 0,284        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 5       | 6,017834E+00  | 6,015971E+00  | -0,031       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 5       | 3,174572E-02  | 3,207066E-02  | 1,024        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 5       | 5,768340E+00  | 5,769686E+00  | 0,023        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 5       | -5,231355E-01 | -5,207598E-01 | -0,454       |
| <i>SIXX</i> ( maille 1 ) | 6       | 3,209297E+00  | 3,210140E+00  | 0,026        |
| <i>SIYY</i> ( maille 1 ) | 6       | 4,753345E-01  | 4,775721E-01  | 0,471        |
| <i>SIXX</i> ( maille 2 ) | 6       | 6,149462E+00  | 6,146788E+00  | -0,043       |
| <i>SIYY</i> ( maille 2 ) | 6       | 3,048490E-01  | 3,052262E-01  | 0,124        |
| <i>SIXX</i> ( maille 3 ) | 6       | 7,571241E+00  | 7,573072E+00  | 0,024        |
| <i>SIYY</i> ( maille 3 ) | 6       | -7,863557E-01 | -7,827982E-01 | -0,452       |

## 5.4 Remarques

Idem modélisation A concernant le nombre d'incrémentes sur la précision des résultats.

Le nombre d'itérations est égal à 360.

## 6 Synthèse des résultats

---

Un nombre important d'incrément est nécessaire pour obtenir une précision correcte : pour information, dix incrément par étape de chargement ne sont pas suffisants.