SSNV122 - Rotation et traction suiveuse hyper-élastique d'un barreau

Résumé :

Ce test de mécanique quasi-statique consiste à faire tourner de 90° un barreau parallélépipédique et à le soumettre à une traction importante au moyen de forces suiveuses. On valide ainsi la cinématique des grandes déformations hyper-élastiques (commande STAT_NON_LINE, mot-clé COMPORTEMENT), et donc en particulier les grandes rotations, pour une relation de comportement élastique linéaire, ainsi que la prise en compte de forces suiveuses (commande STAT_NON_LINE mot clé TYPE_CHARGE='SUIV').

Le barreau est modélisé par un élément volumique (HEXA8, modélisation A).
La modélisation B valide quant à elle les charges suiveuses de type fonctions dépendant de la géométrie initiale.

Les résultats obtenus par *Code_Aster* ne diffèrent pas de la solution théorique.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

1.2 Propriétés de matériaux

Comportement hyper-élastique de SAINT VENANT - KIRCHHOFF :

$$\mathbf{S} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}(\mathbf{E})\,\mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu}\,\mathbf{E}$$

$E = 200\,000.$ MPa
$\nu = 0.3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Le chargement est appliqué en deux temps : tout d'abord, une rotation d'ensemble de la structure, suivie par une traction exercée par des forces suiveuses.

Pour la modélisation B, la valeur de p dépend de la coordonnée Y .

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence de la modélisation A

Il s'agit d'un problème plan. On peut chercher la solution sous la forme d'une rotation rigide suivie d'une dilatation d'un facteur a dans une direction et b dans l'autre :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotation}} \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traction}} \begin{pmatrix} b(-Y) \\ a\ X \\ Z \end{pmatrix} \qquad \text{soit} \quad u = \begin{pmatrix} -X & -bY \\ AX & -Y \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation et la déformation de Green-Lagrange sont alors :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad e_x = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad e_y = \frac{b^2 - 1}{2}$$

La relation de comportement conduit à un tenseur de contraintes lagrangiennes diagonal (avec λ et μ les coefficients de Lamé) :

$$S_{xx} = (\lambda + 2\mu)\ e_x + \lambda e_y$$

$$S_{yy} = \lambda e_x + (\lambda + 2\mu)\ e_y \qquad \text{où} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$S_{zz} = \lambda e_x + \lambda e_y$$

On en déduit le tenseur des contraintes de Cauchy, lui aussi diagonal :

$$\sigma_x = \frac{b}{a}\ S_y \qquad \sigma_y = \frac{a}{b}\ S_x \qquad \sigma_z = \frac{1}{a\,b}\ S_z$$

Enfin les conditions aux limites s'écrivent :

$$\sigma_x = 0 \ \ (\text{bord libre}) \qquad \sigma_y = -p \ \ (\text{traction})$$

On peut en outre calculer les efforts exercés sur les faces :

$$[1, 3] \qquad \mathsf{F}_y = -\sigma_y\, b\, S_{o[1,3]}$$

$$[3, 4] \qquad \mathsf{F}_x = 0$$

$$[1, 2, 3, 4] \qquad \mathsf{F}_z = \begin{cases} -\ \sigma_z\, a\, b\ S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté inférieur de la face} \\ \sigma_z\, a\, b\ S_{o[1,2,3,4]} & \text{sur le côté supérieur de la face} \end{cases}$$

où $S_o[\ ]$ représentent les surfaces initiales des faces.

2.2 Référence de la modélisation B

Les résultats de références pour cette modélisation sont fournis par la même calcul auquel l'étape de rotation n'a pas été appliquée.

2.3 Résultats de référence

On adopte comme résultats de référence les déplacements, les déformations de Grenn-Lagrange, les contraintes de Cauchy et les forces exercées sur les faces $[1,3]$, $[3,4]$ et $[1,2,3,4]$ en fin de chargement ($t=2s$).

On cherche p tel que la dilatation $a=1{,}1$

soit $p=-26610.3\,MPa$.

La dilatation b et les déplacements sont alors :

$$b=0.9539 \quad e_x=0.105 \quad e_y=-0.045$$

Les contraintes de Cauchy vallent :

$$\sigma_x=0 \quad \sigma_y=26610.3 \text{ MPa} \quad \sigma_z=6597.6 \text{ MPa}$$

Enfin, les forces exercées sont :

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= -25384\ S_{o[1,3]}\ N \\ F_z &= -6.9228\ 10^9\ N \qquad (\text{côté inférieur}) \end{aligned}$$

2.4 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.5 Références bibliographiques

[1] Eric LORENTZ "Une relation de comportement hyperélastique non linéaire" Note interne EDF/DER HI-74/95/011/0

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation volumique : 1 maille `HEXA 8`
1 maille `QUAD4`

- phase de rotation rigide $0 \leq t \leq 1\,s$

$[3{,}7]$ $DX = 0$ $DY = 0$ $DZ = 0$

$[1{,}5]$ $DX = -1000 \sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$ $DY = -1000\left(1 - \cos\dfrac{\pi t}{2}\right)$ $DZ = 0$

$[2{,}6]$ $DZ = 0$

$[4{,}8]$ $DZ = 0$

- phase de traction : $1\text{s} \leq t \leq 2\text{s}$
  - conditions aux limites (`TYPE_CHARGE: 'DIDI'`)

    $[3{,}7]$ $\Delta DX = 0$ $\Delta DY = 0$ $DZ = 0$

    $[1{,}5]$ $\Delta DY = 0$ $DZ = 0$

    $[2{,}6]$ $DZ = 0$

    $[4{,}8]$ $DZ = 0$

  - chargement : pression (négative) sur la face $[2,4,8,6]$ (`PRES_REP`) : maille $[2,4,8,6]$ (`QUAD4`) : $PRES = -26610.3\,(t-1)$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8 Nombre de mailles : 2
1 `HEXA8`
1 `QUAD4`

3.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs sont testées en fin de chargement ($t = 2\text{s}$)

Identification	Référence	*Aster*	% différence
Déplacement DX (NO2)	–1953.94	–1953.92	0
Déplacement DY (NO2)	100.	100.	0
Contraintes SIXX (PG1)	0	8. 10^{-10}	
Contraintes SIYY (PG1)	26610.3	26610.3	0
Contraintes SIZZ (PG1)	6597.6	6597.6	0
Contraintes SIXY (PG1)	0	□ 10^{-26}	
Contraintes SIXZ (PG1)	0	□ 10^{-11}	
Contraintes SIYZ (PG1)	0	□ 10^{-10}	
Déformation EPXX (PG1)	0.105	0.105	0
Déformation EPYY (PG1)	–0.045	–0.045	0
Déformation EPZZ (PG1)	0	□ 10^{-16}	
Déformation EPXY (PG1)	0	□ 10^{-14}	

Déformation EPXZ (PG1)	0	□ 10^{-14}	
Déformation EPYZ (PG1)	0	□ 10^{-16}	
Réaction nodale DX (NO3)	0	□ 10^{-3}	
Réaction nodale DY (NO3)	$-6.3462\ 10^{9}$	$-6.3461\ 10^{9}$	-0.001
Réaction nodale DZ (NO3)	$-1.7307\ 10^{9}$	$-1.7307\ 10^{9}$	0.004
Réaction nodale DX (NO4)	0	0	

Identification	**Valeur de référence**	**Type de référence**	**Tolérance**
Champ `EPGQ_ELGA`, Maille `MA1`, Point 1 , Composante `PRIN_1`	-	'NON_REGRESSION'	-
Champ `EPGQ_ELNO`, Maille `MA1`, Noeud `N08` , Composante `PRIN_3`	-	'NON_REGRESSION'	-

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Les caractéristiques de la modélisation sont les mêmes que pour la modélisation A. On procède à deux calculs. Le premier sert de référence, seule la phase de traction est faite. Dans le second on applique la rotation suivie de la phase de traction.

Suite à la rotation, les valeurs de Y sur la face sur la laquelle on applique la pression ont changé. Cependant cela ne doit pas modifier les valeurs de la pression sur la face, car la fonction de pression dépend de la géométrie initiale et non de la géométrie réactualisée. Au changement de repère près, on doit donc retrouver les mêmes valeurs de contraintes et de réactions d'appuis que celles du cas de référence sans rotation.

Pour la phase de traction, pression est définit ainsi :

$$p=-26610.3(t-1)$$

Coordonnée Y	Pression
0	0
1000	p

4.2 Caractéristiques du maillage

Idem modélisation A

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs sont testées en fin de chargement ($t=2\mathrm{s}$ pour la calcul complet)

Identification	Référence	% tolérance
Contraintes SIYY (MA1, PG 1)	6499.1355823353	1,00E-004
Contraintes SIXX (MA1, PG 1)	-2742.7772229229	1,00E-004
Contraintes SIZZ (MA1, PG 1)	953.28609907388	1,00E-004
Contraintes SIXY (MA1, PG 1)	999.17919974535	1,00E-004
Réaction nodale DX (NO3)	4.7691648248739E+08	1,00E-004
Réaction nodale DZ (NO3)	-1.3348410985705E+09	1,00E-004

5 Synthèse des résultats

Il apparaît à l'issue de ce test (modélisation A) que la solution numérique coïncide remarquablement avec la solution analytique. On remarquera cependant que la forte non linéarité due aux grandes rotations nécessite une discrétisation en temps relativement fine, sans être pénalisante sur la précision puisque, contrairement à une relation de comportement incrémentale, les erreurs ne se cumulent pas d'un pas de temps sur l'autre.

La modélisation B valide la dépendance de la pression à la géométrie initiale.