SSNV152- Traction élastique. Calcul des contraintes de Cauchy

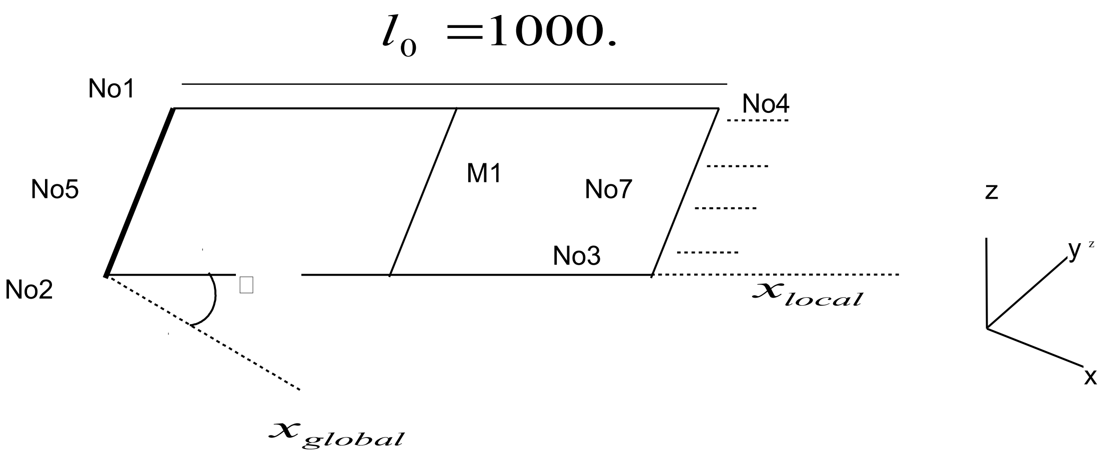
Résumé

Le but de ce test est de valider le calcul des contraintes de Cauchy par l'option SIGM_ELNO.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La géométrie de ce test est une plaque carrée dans le plan (x, y) tournée de $30°$ par rapport à x autour de z.



On appelle l la longueur de la plaque déformée, on notera x, y, z les coordonnées de la configuration déformée et X, Y, Z les coordonnées de la configuration initiale

1.2 Propriétés des matériaux

On prend $E = 200000. MPa$ et $\nu = 0$

1.3 Conditions aux limites et chargements mécaniques

On bloque les nœuds $No1$, $No5$ et $No2$ de sorte que $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$,
et on impose un déplacement local $Dx = 100.$ sur les nœuds $No3$, $No4$ et $No7$.

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est analytique.

Passage de l'état initial à l'état déformé :

$$x=\frac{1}{l_0}X,\ y=\frac{a}{a_0}Y,\ z=\frac{b}{b_0}Z$$

où

- a est la longueur de la déformée de la plaque suivant Y,
- a_0 est la longueur initiale de la plaque,
- b est l'épaisseur de la plaque déformée,
- b_0 est l'épaisseur initiale de la plaque.

Du fait que $\nu=0$ et des hypothèses de coque, on a $a=a_0,\ b=b_0$

Tenseur Green-Lagrange :

Par définition du tenseur de Green-Lagrange, on a $E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)\right)$

Avec $u=x-X=\frac{l-l_0}{l_0}X$, on a donc $E_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{l-l_0}{l}+\frac{l-l_0}{l}+\frac{(l-l_0)^2}{l_0^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{l^2-l_0^2}{l_0^2}\right)$

En remplaçant , on a $E_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1100^2-1000^2}{1000^2}\right)=0.105$

Gradient de déformation :

Par définition :

$$F=\begin{bmatrix}\frac{dx}{dX} & \frac{dx}{dY} & \frac{dx}{dZ}\\ \frac{dy}{dX} & \frac{dy}{dY} & \frac{dy}{dZ}\\ \frac{dz}{dX} & \frac{dz}{dY} & \frac{dz}{dZ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{l}{l_0} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Soit $J=\det F=\frac{l}{l_0}$

Contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

Soit S la contrainte de $PK2$, dans notre cas, $S_{11}=E.E_{11}=200000\times 0.105=21000$

Contrainte de Cauchy

Soit s le tenseur de contraintes de Cauchy, on a la relation $s=\left(\frac{1}{\det F}\right)\left(F.S.F^T\right)$, on en déduit alors que $s_{xx}=\left(\frac{1}{\frac{l}{l_0}}\right)\frac{l}{l_0}.S_{11}.\frac{l}{l_0}=\frac{l}{l_0}.S_{11}=\frac{1100}{1000}.21000=23100$

2.2 Résultats de référence

On calcule des déplacements DX et DY au nœud $NO3$, les contraintes de $PK2$ et les contraintes de Cauchy sur la maille $M1$.

2.3 Incertitude sur la solution

Résultat analytique.

2.4 Références bibliographiques

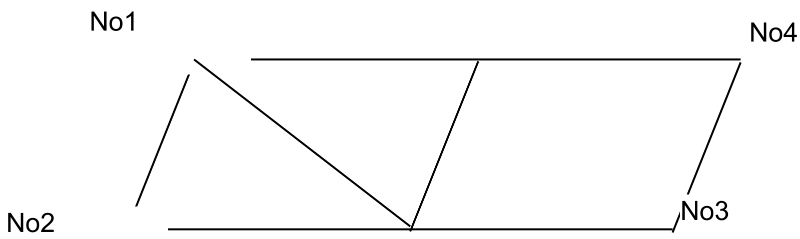
Néant.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise des éléments COQUE_3D

3.2 Caractéristiques du maillage



Les coordonnées des principaux nœuds :

Nœud	$Coor_x$	$Coor_y$	$Coor_z$
$N01$	–500	866.025	0.
$N02$	0	0	0.
$N03$	866.025	500	0.
$N04$	366.025	1366.025	0.

Les mailles utilisées sont :
1 maille QUAD9
2 mailles TRIA7

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	*Aster*	Différence
$DX\ (No4)$	8.66025 E+01	8.66025 E+01	4.66 E-05%
$DY\ (No4)$	50.0	50.0	0%
$PK2$ - $SIXX\ (M1)$	21000.	21000.	2.04 E-08%
Cauchy- $SIXX\ (M1)$	23100.	23100.	2.14 E-08%

4 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés sont en accord avec la solution analytique.