

## SSNV187 - Validation de la loi ELAS\_HYPER sur un cube

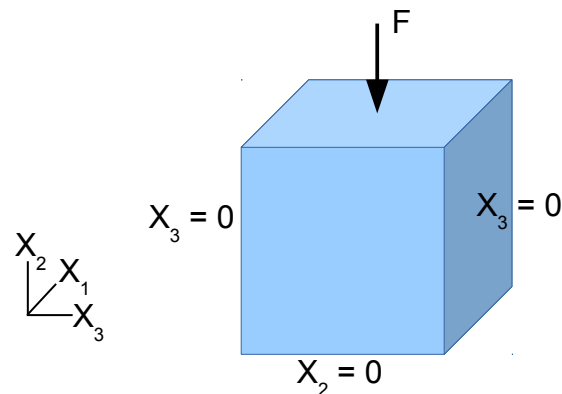
---

### Résumé :

Ce test permet de valider le comportement hyper-élastique de type Signorini (matériau ELAS\_HYPER). On s'appuie sur un test élémentaire en déformations planes et en 3D, par rapport à une référence analytique.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



On considère un cube de côté 1m qui repose sur un plan ( $x_2=0$  sur la face inférieure), soumis à une pression  $F$  sur la face supérieure et en situation de déformation plane suivant  $x_3$  ( $x_3=0$  sur les faces droite et gauche). Le cube ne peut donc que s'étirer suivant l'axe  $x_1$ .

### 1.2 Propriétés des matériaux

On teste sur trois matériaux différents, correspondant à trois modèles courants en hyper-élasticité.

Comportement ELAS_HYPER	Mooney-Rivlin	Néo-Hookéen	Signorini
C10	0.709	1.2345	0.1234
C01	2.3456	0	1.2345
C20	0	0	0.456
NU	0.499	0.499	0.499

### 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Face inférieure :  $DY=0$
- Face supérieure :  $F=0.876$  Pa
- Face gauche et droite :  $DZ=0$  en 3D, rien en D\_PLAN

Le chargement est croissant de  $F=0$  à  $F=0.876$ Pa, en 20 incréments.

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul

On se repose sur le résultat de [bib1]. L'état de déformations planes permet d'écrire le champ de déplacement uniforme dans le cube très facilement :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \cdot x_1 \\ u_2 = w \cdot x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec  $w$  le déplacement vertical (négatif) de la face supérieure et  $a_1$  une constante arbitraire. La condition d'incompressibilité permet d'écrire :

$$a_1 = \frac{-w}{1+w} \quad (2)$$

Et on trouve la relation entre la force appliquée  $F$  et le déplacement  $w$  de la face supérieure :

$$F = 2S \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left( \frac{\partial \Psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial J_2} \right) \quad (3)$$

$S$  est la surface,  $\Psi$  est le potentiel de déformation et  $J_1$ ,  $J_2$  sont les invariants du tenseur de Green-Lagrange. Le potentiel de déformation utilisé par ELAS\_HYPER est le suivant :

$$\Psi = C_{10} \cdot (J_1 - 3) + C_{01} \cdot (J_2 - 3) + C_{20} \cdot (J_1 - 3)^2 + \Psi_{vol} \quad (4)$$

$\Psi_{vol}$  est le potentiel correspondant à l'incompressibilité. Il dépend des invariants  $J_1$  et  $J_2$  et de  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  et  $C_{20}$  qui sont les caractéristiques matériaux. Comme de plus  $S=1$  on obtient :

$$F = 2 \cdot \frac{w \cdot (2+w) \cdot (1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} \cdot \left[ C_{10} + C_{01} + 2 \cdot C_{20} \cdot \frac{w^2 \cdot (2+w)^2}{(1+w)^2} \right] \quad (5)$$

La résolution de cette équation non linéaire en  $w$  se fait simplement par dichotomie pour les  $w < 0$ .

## 3 Références bibliographiques

- 1 G. A. HOLZAPFEL: Nonlinear solid mechanics, 2001, Wiley.

## 4 Modélisation A

---

### 4.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes D\_PLAN, en utilisant des mailles linéaires.

### 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 207 dont 132 triangles et 47 quadrangles (le reste étant les mailles de bord).

Nombre de nœuds : 132

### 4.3 Grandeurs testées et résultats

#### Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

#### Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

#### Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

## 5 Modélisation B

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en 2D avec déformations planes `D_PLAN`, en utilisant des mailles quadratiques.

### 5.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments quadratiques : 207 dont 132 triangles et 47 quadrangles (le reste étant les mailles de bord).

Nombre de nœuds : 132

### 5.3 Grandeurs testées et résultats

#### Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

#### Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

#### Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

## 6 Modélisation C

---

### 6.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D.

### 6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 8734 tétraèdres et 1728 nœuds.

### 6.3 Grandeurs testées et résultats

#### Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

#### Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

#### Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

## 7 Modélisation D

---

### 7.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D\_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés).

### 7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 271 tétraèdres et 514 nœuds.

### 7.3 Grandeurs testées et résultats

#### Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-3,40091E-2	Analytique	0,20%

#### Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

#### Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	Tolérance
Déplacement $w$	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

## 8 Synthèse des résultats

---

Les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence.