

## FORMA04 - Travaux pratiques de la formation « Utilisation avancée » : contact de Hertz

---

### Résumé :

Ce TP traite du contact de Hertz, un des rares cas non triviaux de contact pour lequel on dispose d'une solution analytique.

Le modèle est constitué de deux demi-sphères que l'on vient mettre en contact l'une contre l'autre.

Ce test simple permettra d'illustrer la mise en données du contact, les différentes manières de résoudre le problème et enfin les outils à disposition pour post-traiter un calcul de contact.

## Table des matières

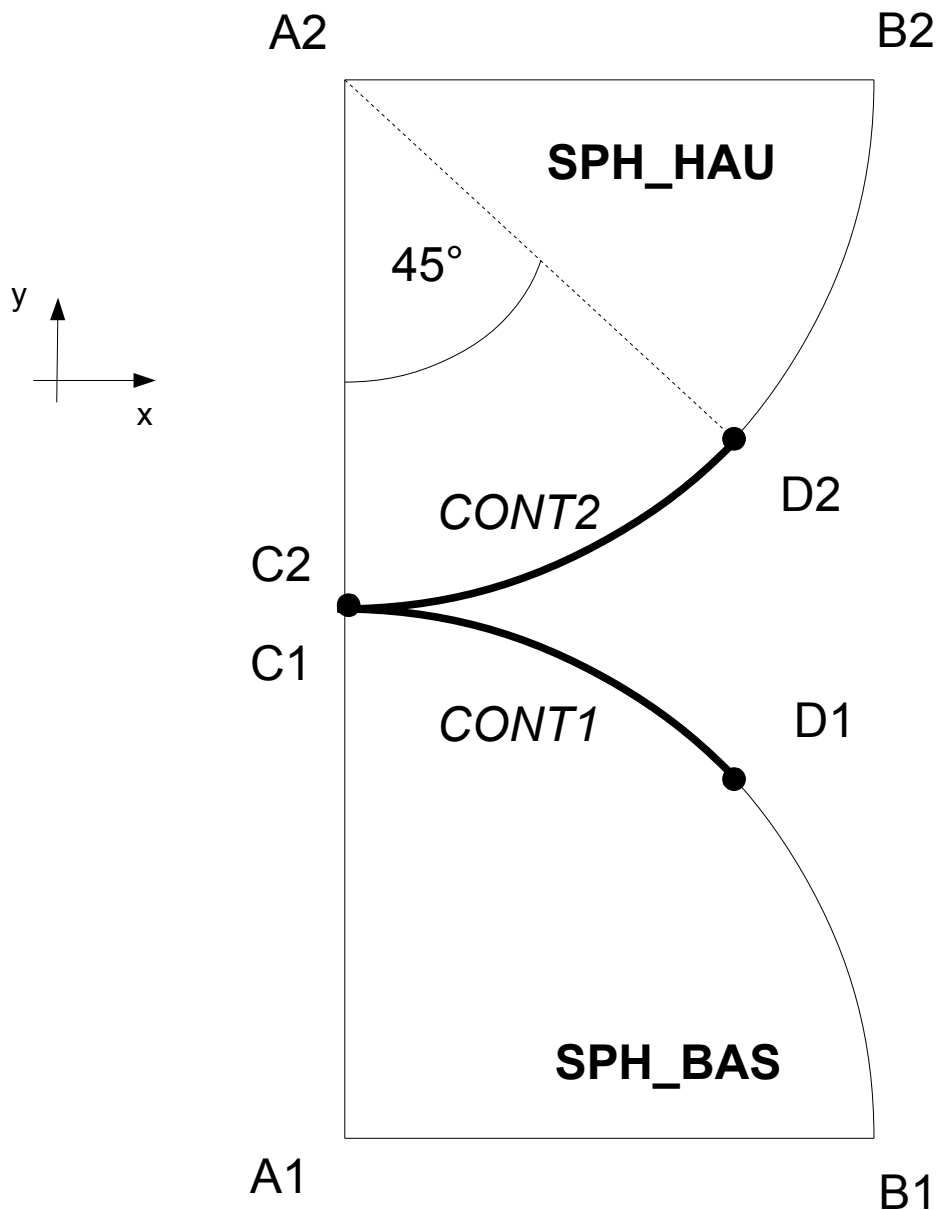
1	Problème de référence.....	3
1.1	Géométrie.....	3
1.2	Propriétés des matériaux.....	3
1.3	Conditions aux limites et chargements.....	4
2	Solution de référence.....	5
2.1	Méthode de calcul.....	5
2.2	Grandeurs et résultats de référence.....	5
2.3	Incertitudes sur la solution.....	5
2.4	Références.....	5
3	Modélisation A.....	6
3.1	Mise en œuvre du TP.....	6
3.1.1	Géométrie.....	6
	Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer.....	6
3.1.2	Maillage.....	6
3.1.3	Fichier de commandes.....	7
3.1.4	Pression de Hertz.....	8
3.1.5	Contrainte de Von Mises.....	8
3.2	Grandeurs testées et résultats.....	8
4	Modélisation B.....	9
4.1	Mise en œuvre du TP.....	9
4.1.1	Formulation continue.....	9
4.2	Grandeurs testées et résultats.....	9
5	Modélisation C.....	10
5.1	Mise en œuvre du TP.....	10
5.1.1	Réalisation de la géométrie.....	10
5.1.2	Réalisation du maillage.....	10
5.2	Grandeurs testées et résultats.....	11

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie

Le modèle est constitué de deux demi-sphères. On choisit de traiter le problème en **axisymétrique**, on ne modélisera donc que des quarts de disque. Les données géométriques sont les suivantes :

- Rayon des sphères :  $R = 50 \text{ mm}$



### 1.2 Propriétés des matériaux

Le matériau est élastique linéaire :

- Module d'Young :  $E = 20000 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.3$

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

- Déplacement suivant  $DX$  bloqué sur l'axe  $A1A2$  (cette condition est implicite en axisymétrique, on l'impose néanmoins pour les points qui ne seraient pas parfaitement sur l'axe)
- Déplacement suivant  $DY$  imposé :
  - +2 mm sur  $A1B1$
  - 2 mm sur  $A2B2$

## 2 Solution de référence

---

### 2.1 Méthode de calcul

En 1881, Hertz a établi sous certaines hypothèses une solution au problème qui porte son nom[1]. Ainsi en supposant un contact sans frottement et pour lequel la demi-largeur de contact  $a$  est très petite devant le rayon des sphères  $R$  ( $a \ll R$ ), la pression de contact aux points  $C1$  et  $C2$  vaut [2] :

$$P_0 = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2h}{R}} \quad \text{éq 2.1-1}$$

où  $h$  correspond à l'écrasement imposé, qui vaut ici  $4 \text{ mm}$ .

La demi-largeur de contact  $a$  s'exprime en fonction de l'écrasement imposé et du rayon des sphères :

$$a = \sqrt{\frac{Rh}{2}} \quad \text{éq 2.1-2}$$

La surface de contact est un disque de rayon  $a$ , la distribution de pression en fonction du rayon  $r$  dans cette zone est la suivante :

$$\text{Si } r \leq a \text{ alors } P(r) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad \text{éq 2.1-3}$$

### 2.2 Grandeurs et résultats de référence

On comparera la pression obtenue au centre de la zone de contact et la demi-largeur de contact à la solution analytique ci-dessus.

### 2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune (sous les hypothèses données ci-dessus).

### 2.4 Références

## Table des Matières

---

1: HERTZ H, Über die Berührung fester elastischer Körper, 1881

2: DUMONT G, La méthode des contraintes actives appliquée au contact unilatéral, 1993

## 3 Modélisation A

---

### 3.1 Mise en œuvre du TP

#### 3.1.1 Géométrie

##### ***Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer***

La géométrie est réalisée avec la plate-forme Salome-Meca, module `Geometry`. L'outil « Sketcher » (Menu `New Entity` → `Basic` → `2D Sketch`) permet de construire **le contour du disque supérieur** (pour l'arc de cercle on peut entrer un angle et un rayon négatif). On peut ensuite construire **une face sur ce contour** (Menu `New Entity` → `Build` → `Face`). Le point *D2* sera créé lors de la construction du contour (l'arc de cercle est fait en 2 fois).

Par symétrie, on peut générer la deuxième sphère (Menu `Operations` → `Transformation` → `Mirror Image`). **Il faut construire une droite horizontale ou un plan pour réaliser la symétrie.**

Il reste à **assembler les deux sphères** pour ne constituer qu'un seul objet GEOM (Menu `New Entity` → `Build` → `Compound`).

Enfin il faut **créer des groupes** sur cette géométrie (avec les noms suggérés dans la figure ci-dessus) (Menu `New Entity` → `Group` → `Create Group`).

**On attire l'attention sur le fait que les groupes sont créés en dernier .**

Créer les groupes pour les surfaces des demi-sphères *SPHHAU* et *SPHBAS*

Pour créer les points *C1* et *C2*, on utilise la fonctionnalité permettant de sélectionner un sous élément d'une entité GEOM (Dans la boîte de dialogue *Create Group*, cochez « *Only Sub-shapes of the Second Shape* » puis pour *C2* par exemple, sélectionner comme « *Second Shape* » la demi-sphère supérieure dans l'arbre des objets).

Créer les groupes pour l'application des conditions aux limites : le long de l'axe d'axisymétrie (*AIA2*) et sur les parties supérieures et inférieures des demi-sphères (*AIB1* et *A2B2*).

Pour la modélisation du contact, on aura besoin de groupes de mailles représentant les surfaces potentielles de contact : créer les groupes *CONT1* et *CONT2* .

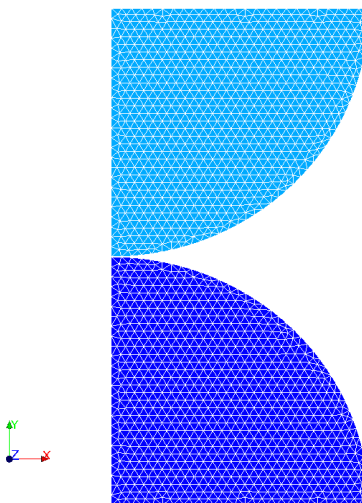
#### 3.1.2 Maillage

On utilise le module `Mesh`. Le maillage est défini par le menu `Mesh` → `Create Mesh` avec la géométrie à mailler. Le maillage est réalisé en triangles. On utilisera les hypothèses de maillage automatique « *Assign a set of hypotheses* → *2D: Automatic Triangulation* » en choisissant une longueur maximum de 2.

On calcule le maillage (Menu `Mesh` → `Compute` ). On obtient alors un maillage contenant environ 3000 triangles et 1500 nœuds.

On importera ensuite les groupes à partir de la géométrie (Menu `Mesh` → `Create Groups from Geometry`).

On importera le maillage au format MED.



**Illustration 3.1: Maillage  
obtenu pour la modélisation A**

### 3.1.3 Fichier de commandes

On utilise le module `AsterStudy`.

Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet `Case View`.

On définit le fichier de commandes du cas de calcul.

Nota : Pour ajouter des commandes : Menu `Commands` → `Show All`.

- En utilisant la commande `STAT_NON_LINE`, construire le fichier de commandes relatif au cas-test en ne prenant pas le contact en compte dans un premier temps.  
**Que constate-t-on sur la convergence ? Que faudrait-il faire pour converger ?**

*Indice : comment le critère de convergence par défaut est-il construit ?*

Aide pour construire le fichier de commandes :

- Lire le maillage au format MED : Commande `LIRE_MALLAGE`.
  - Orienter le maillage sur les contacts : Commande `MODI_MALLAGE / ORIE_PEAU_2D` en utilisant les groupes `CONT1` et `CONT2`.
  - Définir le matériau : Commande `DEFI_MATERIAU`.
  - Affecter le matériau : Commande `AFPE_MATERIAU`.
  - Définir les éléments finis utilisés : Commande `AFPE_MODELE` pour la modélisation `AXIS`.
  - Affecter les conditions aux limites mécaniques : `AFPE_CHAR_MECA / Enforce DOF (DDL_IMPO)`.
  - Créer la discrétisation temporelle à l'aide de s c ommande s `DEFI_LIST_REEL` et `DEFI_LIST_INST`.
- Ajouter la définition du contact : **orienter les surfaces**, définir la charge de contact avec la commande `DEFI_CONTACT` et adapter les options du solveur non linéaire.

*Une alarme apparaît lors du calcul avec contact. On conservera la méthode de contact par défaut dans un premier temps (`FORMULATION='DISCRETE'` et `ALGO_CONT='CONTRAINTTE'`).*

- Question bonus : combien y-a-t-il de mouvements de corps rigide en modélisation axisymétrique ?

*Rappel : un mouvement de corps rigide est un mouvement à déformation nulle.*

## 3.1.4 Pression de Hertz

- Application numérique : calculer à la main avec les données du problème, la valeur de la pression de Hertz et de la demi-largeur de contact. Les comparer aux valeurs obtenues par le calcul. Que constate-t-on ? **Pourquoi cet écart ?**

*Remarque : on prendra en première approximation la composante  $SIYY$  du champ  $SIEF\_NOEU$  comme pression de contact*

- Tracer la pression de contact en fonction du rayon dans la zone de contact, la comparer à la solution analytique.

*On utilisera les commandes  $DEFI\_GROUP$  ( $CREA\_GROUP\_NO / OPTION='NOEUD\_ORDO'$ ) afin de créer un groupe de nœuds avec une abscisse curviligne orientée,  $POST\_RELEVE\_T$  pour extraire dans une table la composante  $SIYY$  le long de ce groupe (une colonne de cette table appelée  $ABSC\_CURV$  définit l'abscisse curviligne) et enfin  $RECU\_FONCTION$  ( $TABLE / PARA\_X / PARA\_Y$ ) pour créer la fonction. On l'imprimera au format  $XMGRACE$  avec la commande  $IMPR\_FONCTION$  ( $COURBE/FONCTION$ ) en sélectionnant un « pilote »  $INTERACTIF$ .*

## 3.1.5 Contrainte de Von Mises

- Afficher la contrainte de Von Mises sur la configuration déformée avec Salomé. **Comment varie cette contrainte dans la sphère ? Où se situe le maximum ?**

*On affichera la composante  $VMIS\_SG$  du champ des contraintes équivalentes  $SIEQ\_NOEU$  calculé avec la commande  $CALC\_CHAMP / CRITERES$ .*

## 3.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\sigma_{yy}$ point $CI$	'ANALYTIQUE'	-2798,3 Mpa	1,0%



## 4 Modélisation B

On repartira de la modélisation A. Le maillage est le même que celui de la modélisation A **mais il est passé en quadratique**.

### 4.1 Mise en œuvre du TP

#### 4.1.1 Formulation continue

- Convertir le maillage de la modélisation A en maillage quadratique dans le module Mesh (Menu Modification → Convert to/from quadratic)

*Afin de profiter pleinement des éléments quadratiques et d'obtenir un profil de pression lisse, il est important de placer les nœuds milieux sur la géométrie lors de la conversion (cocher pour cela la case « Medium nodes on geometry » lors de la conversion).*

- Changer de méthode de contact et utiliser la formulation 'CONTINUE'. **Observer la pression de contact obtenue à l'aide du degré de liberté LAGS\_C du champ DEPL.** Comparer avec la méthode de contact par défaut. Que constate-t-on ? Laquelle des méthodes fournit la meilleure approximation ?

*Pour obtenir un profil de pression correct, il faut utiliser un schéma d'intégration des termes de contact aux points de Gauss (INTEGRATION='GAUSS' dans la commande DEFI\_CONTACT / ZONE).*

*Afin de supprimer l'alarme qui apparaît avec les réglages par défaut, il est nécessaire d'imposer REAC\_ITER=1 sous le mot-clé facteur NEWTON de la commande STAT\_NON\_LINE (en formulation continue, la matrice tangente est forcément reconstruite à chaque itération).*

### 4.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
DEPL LAGS <sub>C</sub> point C1	'ANALYTIQUE'	-2798,3 Mpa	3,0%

## 5 Modélisation C

Dans cette modélisation, on réalise un maillage en quadrangles, avec un raffinement à proximité de la zone de contact.

### 5.1 Mise en œuvre du TP

#### 5.1.1 Réalisation de la géométrie

Dans cette modélisation, on doit partitionner la géométrie de manière à pouvoir la mailler en quadrangles. Une illustration de la partition possible est donnée dans la figure 5.1.

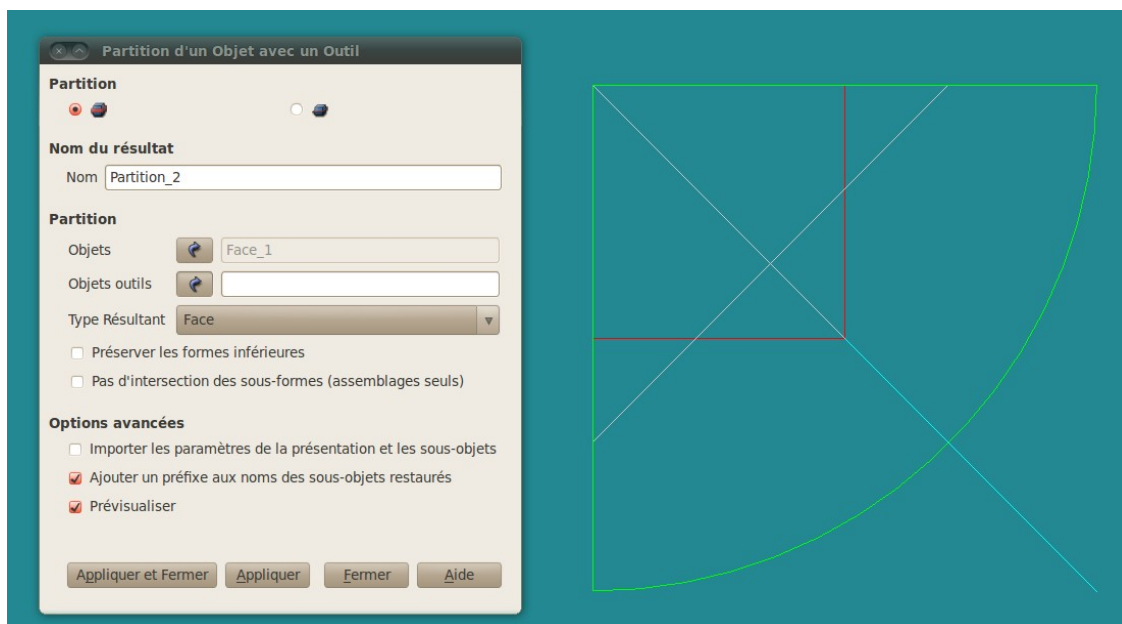
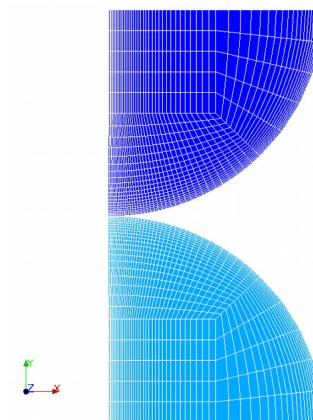


Illustration 5.1: Partition du disque supérieur

#### 5.1.2 Réalisation du maillage

Pour le maillage, on choisit de raffiner autour de la zone de contact en utilisant une progression géométrique sur la circonférence et sur le rayon. Il peut être nécessaire de réorienter certains segments dans le module Mesh.



**Illustration 5.2: Maillage en quadrangles obtenu pour la modélisation C**

Le maillage comporte 2200 éléments pour 2332 nœuds.

## 5.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$\sigma_{yy}$ point <i>CI</i>	'ANALYTIQUE'	-2798,3 Mpa	5,0%