

## SSNS107 – Cylindre avec armatures sous pression

---

### Résumé :

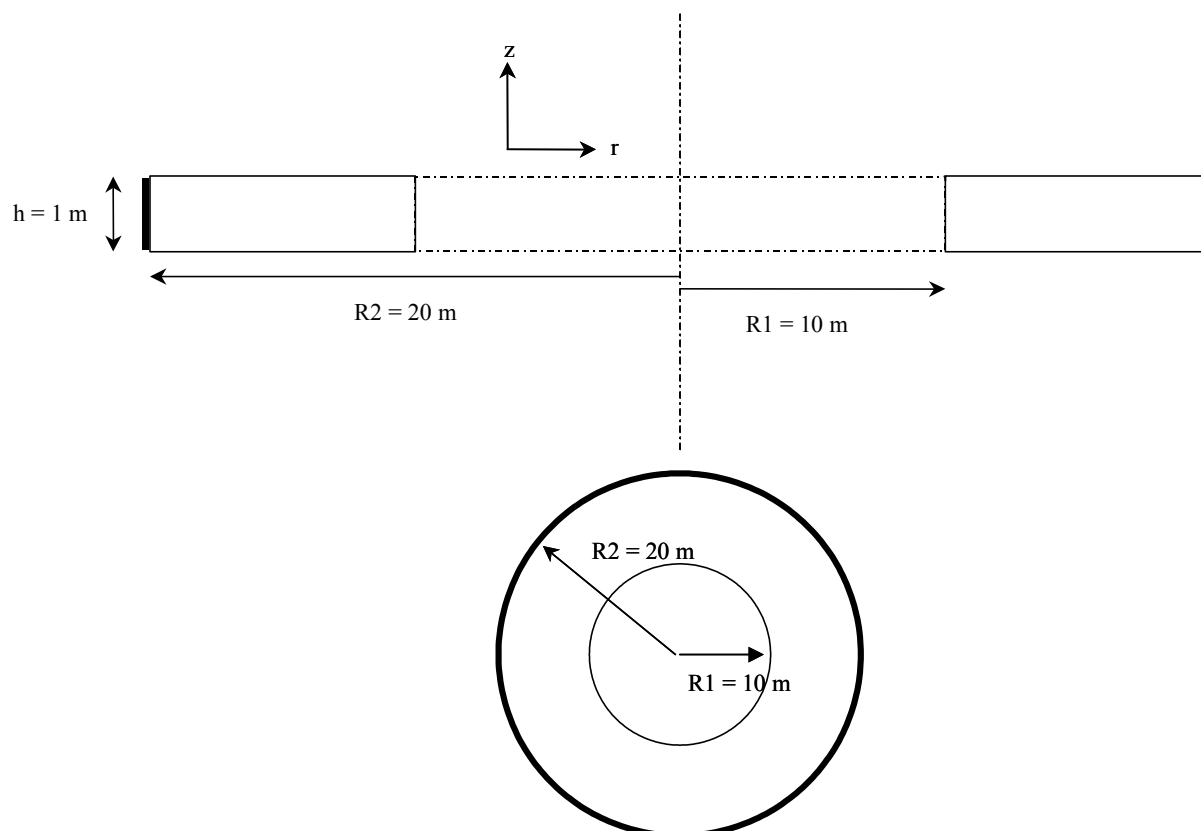
On considère un cylindre avec armatures sous pression. Plus exactement, un cylindre creux, 3D, est complété sur sa face externe par une armature circonférentielle (peau 2D). Cette structure est chargée par une pression interne. Le calcul est élastique linéaire.

La simulation est comparée à une solution analytique afin de valider les modélisations d'armatures de type GRILLE\_MEMBRANE sur une structure.

Toutes les valeurs numériques sont données en unité SI.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Le cylindre a un rayon intérieur  $R_1=10\text{ m}$ , un rayon extérieur  $R_2=20\text{ m}$ , une hauteur  $h=1\text{ m}$ .  
L'armature circonférentielle a une section par unité de longueur de  $e=1\text{ m}^2/\text{ml}$ .

## 1.2 Propriétés des matériaux

Les caractéristiques matériaux du béton (cylindre creux) sont  $E=2E+10 Pa$  et  $\nu=0.2$  ; celles de l'acier (armature circonférentielle)  $E=2E+11 Pa$ ,  $\nu=0$ ,  $E_t=2.E+09$  (module tangent),  $\sigma_y=2.E+11 Pa$  (contrainte de plasticité très grande pour rester dans le domaine élastique).

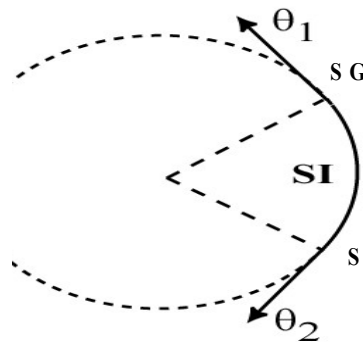
La nappe d'armature a sa direction principale verticale et une section par mètre linéaire de  $1 m$ .

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

On ne s'intéresse qu'à une section angulaire du cylindre.

On impose les conditions suivantes :

- 1) un déplacement normal nul sur les faces latérales de la section angulaire de cylindre ( $SG$  et  $SD$  sur la figure schématique) (déplacement ortho-radial nul)
- 2) un déplacement vertical nul sur la face basse de la section du cylindre (appui simple)
- 3) une pression imposée de  $10^6 Pa$  sur la face interne de la section du cylindre ( $SI$ ) sur la figure schématique) (pression interne)



Désignation schématique des surfaces du cylindre

## 2 Solutions de référence

Pour la solution sans armature, et vues les symétries du problème, le déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$U(r, z) = g(r)u_r + h(z)u_z$$

Avec :

$$g(r) = (a + 3b) \frac{r}{2} + \frac{c}{r}$$

$$h(z) = -az$$

$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{1}{2}(a + 3b) - \frac{c}{r^2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{2}(a + 3b) + \frac{c}{r^2}$$

$$\varepsilon_{zz}(r) = -a$$

$$\sigma_{rr}(r) = A - 2\mu \frac{c}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = A + 2\mu \frac{c}{r^2}$$

$$\sigma_{zz}(r) = B$$

Les conditions aux limites permettent alors d'expliciter les constantes :

$$\sigma_{rr}(R_1) = -P_1$$

$$\sigma_{rr}(R_2) = -P_2$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

avec  $R_2$  le rayon au niveau de l'interface entre le béton et la nappe d'armatures circonférentielle.

$$A = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$B = 0$$

$$2\mu c = R_1^2 R_2^2 \frac{P_1 - P_2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$b = \frac{2(P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2)}{3(3\lambda + 2\mu)(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$a = \frac{\lambda(P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2)}{\mu(3\lambda + 2\mu)(R_2^2 - R_1^2)}$$

On donne ici la solution avec  $P_2$  non nulle car cela sera utile dans la suite.

Dans le cas où il y a armature circonférentielle sur la face externe du cylindre, cette armature exerce une pression. Il faut donc déterminer cette pression (fonction du déplacement), puis appliquer les résultats précédents.

On applique la « formule des chaudronniers » (présence d'armatures):

$$P = \sigma_{\theta\theta}^{armature} \frac{e}{2R_2}$$

Pour relier la contrainte au déplacement solution, on passe par la déformation (la déformation des armatures étant la déformation du cylindre) :

$$P = \frac{E^{armature} e}{2R_2} \left[ \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{(3\lambda + 2\mu)(R_2^2 - R_1^2)} \left( \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right) + \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{P_1 - P_2}{2\mu} \right]$$

En appliquant les résultats précédents avec  $P_2 = P$ , on obtient la solution cherchée.

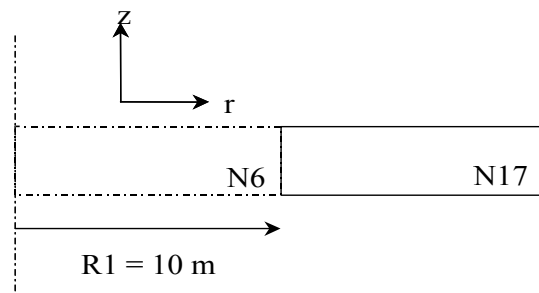
## 3 Modélisation A

La modélisation ne concerne qu'un secteur angulaire du cylindre, un élément dans la section, un élément dans la hauteur, 100 éléments entre  $R_1$  et  $R_2$

### 3.1 Valeurs testées

On teste les valeurs des déplacements radiaux des points situés sur la face intérieure du cylindre de béton ( $N6$  sur la figure ci-dessous) et sur la face extérieure du cylindre de béton ( $NI7$  sur la figure ci-dessous) et on compare à la solution analytique.

Le cylindre est maillé avec des éléments TRIA3.



Nœud	Référence
$N6$	6.76923E-04
$NI7$	3.8462E-04

## 4 Modélisation B

La modélisation B est identique à la modélisation A. Seuls les éléments utilisés pour le maillage changent (QUAD4 au lieu de TRIA3)

Les résultats de la modélisation B sont les suivants :

Nœud	Référence
$N6$	6.76923E-04
$NI7$	3.8462E-04

## 5 Modélisation C

La modélisation C est identique à la modélisation A. Seuls les éléments utilisés pour le maillage changent (éléments quadratiques au lieu de linéaires)

Les résultats de la modélisation C sont les suivants :

Nœud	Référence
$N6$	6.76923E-04
$NI7$	3.8462E-04

## 6 Modélisation D

La modélisation D est identique à la modélisation B. Seuls les éléments utilisés pour le maillage changent (éléments quadratiques au lieu de linéaires)

Les résultats de la modélisation D sont les suivants :

Nœud	Référence
<i>N6</i>	6.76923E-04
<i>NI7</i>	3.8462E-04

## 7 Synthèse

---

Les différentes modélisations de ce cas test valident le comportement `GRILLE_MEMBRANE` pour une structure complète (cylindre avec armature)