

## HPLP311 - Murakami 11.17 Fissure au centre d'une plaque mince rectangulaire faisant obstacle à un flux de chaleur uniforme en milieu isotrope

---

### Résumé :

Il s'agit d'un calcul statique thermo-élastique linéaire isotrope.

C'est un test de base en 2D plan pour un chargement thermique stationnaire calculé par éléments finis sur le même maillage avec un matériau isotrope en mode  $II$ .

### Objectif :

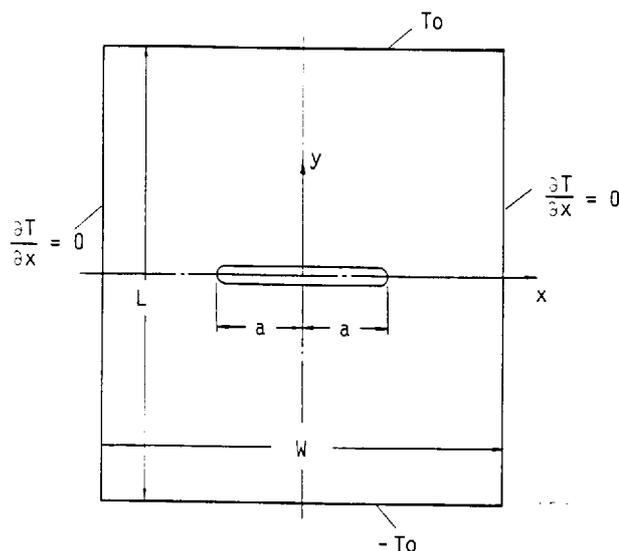
- test de base en 2D plan, pour un chargement thermique stationnaire calculé par éléments finis sur le même maillage, avec matériau isotrope, en mode  $II$ ,
- validation du calcul de  $K_{II}$ ,
- variabilité de  $G$  en fonction de la topologie (secteurs, couronnes) du maillage rayonnant. Vérification de l'invariance des résultats en mécanique de la rupture, à une extrémité de fissure, par rapport au maillage de l'autre extrémité de la même fissure.

Le calcul est testé sur un maillage complet et un demi-maillage. Les paramètres  $L/W$  et  $2A/W$  étant fixes.

On mesure un écart relatif sur  $K_{II}$ , la précision est néanmoins mal définie.

## 1 Problème de référence

### 1.1 Géométrie



Largeur de la plaque :  $W = 0,6 m$   
 Longueur de la plaque :  $L = 0,3 m$   
 Longueur de la fissure :  $2a = 0,3 m$

### 1.2 Propriétés du matériau

Notation pour propriétés thermoélastiques:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{bmatrix} (T - T_{ref})$$

$$S_{11} = 1/E_x$$

$$S_{22} = 1/E_y$$

$$S_{12} = -\nu_x/E_x = -\nu_y/E_y$$

$$S_{66} = 1/G_{xy}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_x$$

$$\alpha_{22} = \alpha_y$$

On se limite au matériau isotrope, tant du point de vue thermique que mécanique :

$$E_x = E_y = 2.10^5 MPa$$

$$\nu_x = \nu_y = 0,3$$

$$\alpha_x = \alpha_y = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ C^{-1}$$

$$\lambda_x = \lambda_y = 54 W / m \text{ } ^\circ C$$

## 1.3 Conditions aux limites et chargement

On considère deux modèles :

- le demi-modèle  $x \geq 0$
- le modèle complet

### Conditions aux limites mécaniques:

- demi-modèle  
 $UX = 0$  le long de l'axe de symétrie  $X = 0$   
 $UY = 0$  au point  $(W/2, 0)$
- modèle complet  
 $UX = 0$  au point  $(0, L/2)$   
 $UY = 0$  aux points  $(-L/2, 0)$  et  $(L/2, 0)$

### Conditions aux limites thermiques:

- demi-modèle  
 $T = 100^\circ C$  sur le bord supérieur  $Y = L/2$   
 $T = -100^\circ C$  sur le bord inférieur  $Y = -L/2$   
flux nul sur l'axe de symétrie, sur le bord libre  $X = W/2$  et sur le bord de la fissure
- modèle complet  
 $T = 100^\circ C$  sur le bord supérieur  $Y = L/2$   
 $T = -100^\circ C$  sur le bord inférieur  $Y = -L/2$   
flux nul sur les bords libres  $X = \pm W/2$  et sur le bord de la fissure

## 2 Solution de référence

### 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Potentiel complexe.

### 2.2 Résultats de référence

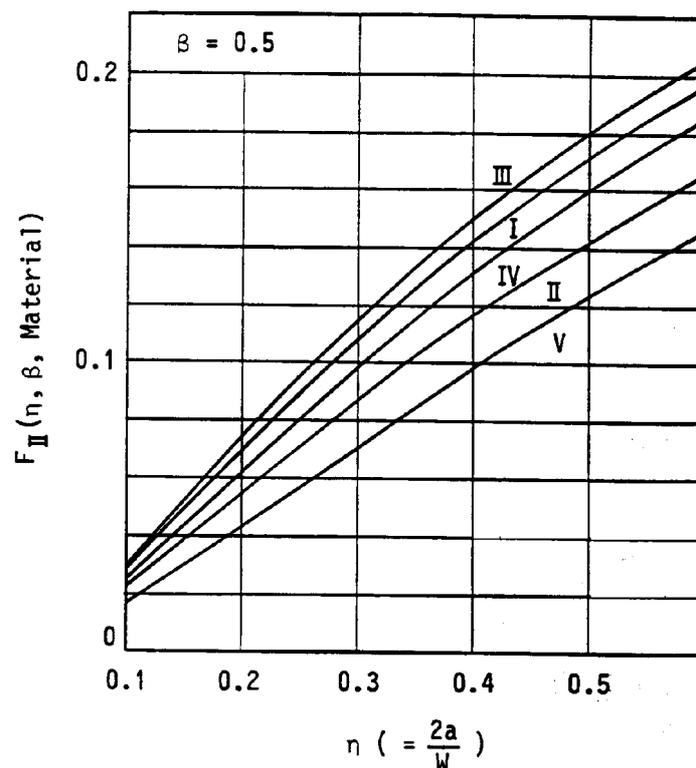
$$\eta = \frac{2a}{W}$$

$$\beta = \frac{L}{W}$$

$$K_{II} = \frac{\alpha_{11} T_0}{S_{11}} \cdot \sqrt{\frac{W}{2}} \cdot F_{II}$$

où le facteur de correction géométrique  $F_{II}$  est donné en fonction de  $\eta$  pour chaque matériau, dans le cas particulier  $\beta = 0,5$  sur les courbes ci-dessous.

Le matériau isotrope étant représenté par la courbe I



### 2.3 Incertitude sur la solution

Précision non définie.

### 2.4 Références bibliographiques

- 1) Y. MURAKAMI : Stress Intensity Factors Handbook, case 11.17, pages 1045-1047. The Society of Materials Science, Japan, Pergamon Press, 1987.

## 3 Modélisations A, B, C, D, E et F

### 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Ces 6 modélisations correspondent à 6 maillages où on fait varier 3 paramètres topologiques. Le tableau ci-dessous résume les différents cas étudiés :

	$NS=8$ , $NC=4$	$NS=4$ , $NC=3$
$rt=0,001*a$	A	B
$rt=0,01*a$	C	D
$rt=0,1*a$	E	F

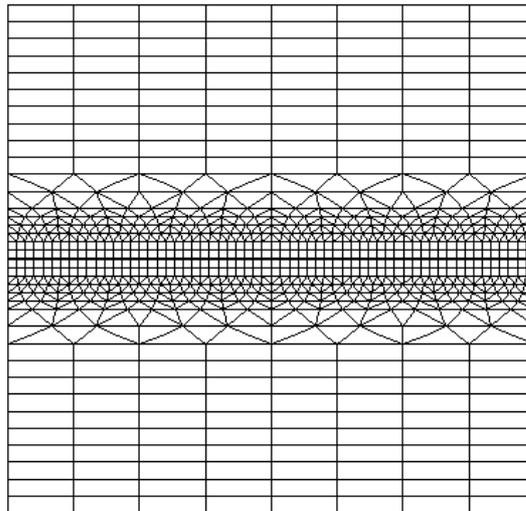
Les paramètres topologiques qui varient sont :

$NS$  : nombre de secteurs sur  $90^\circ$

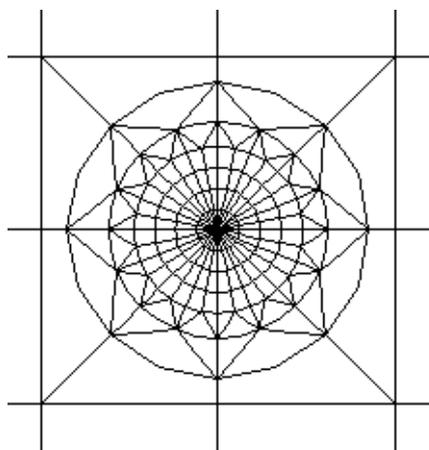
$NC$  : nombre de couronnes

$rt$  : le rayon de la plus grande couronne (avec  $a$  : demi longueur de la fissure)

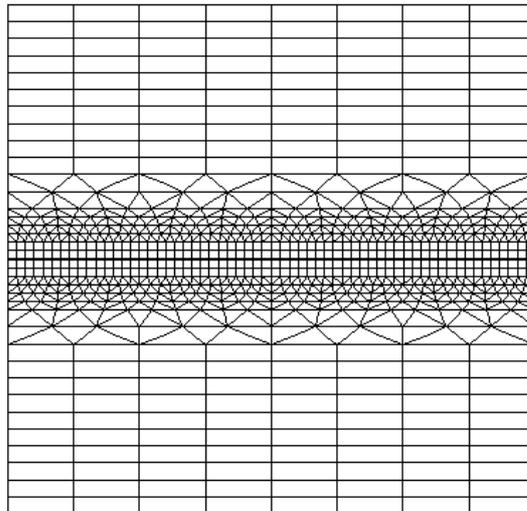
#### 3.1.1 Modélisations A et B



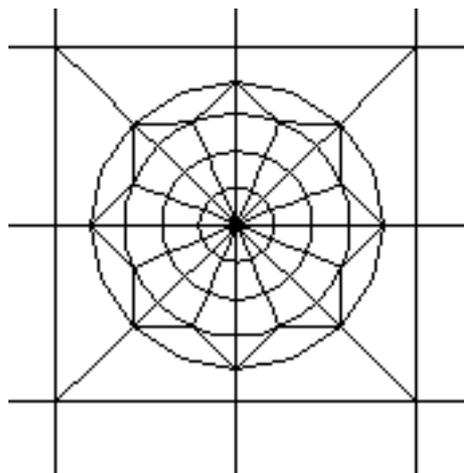
Demi maillage - Modélisation A



## Zoom de la pointe de fissure - Modélisation A

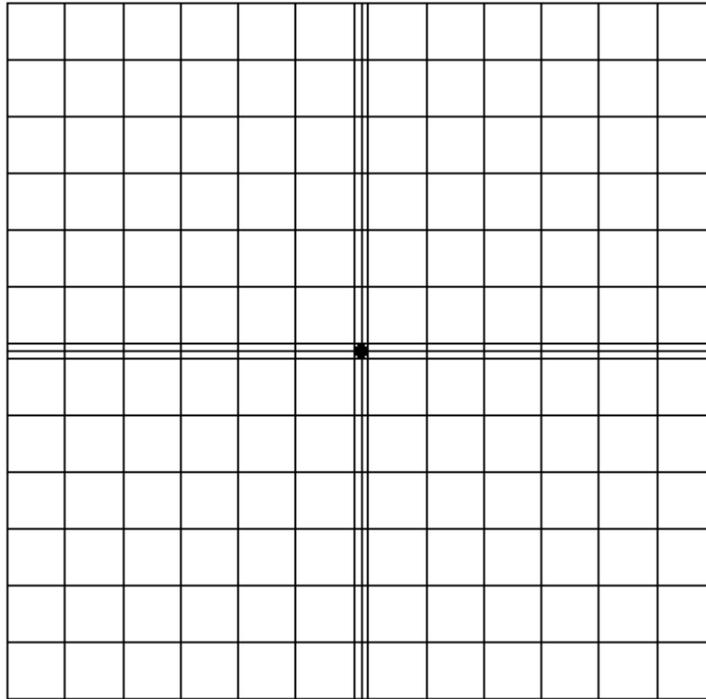


**Demi maillage - Modélisation B**

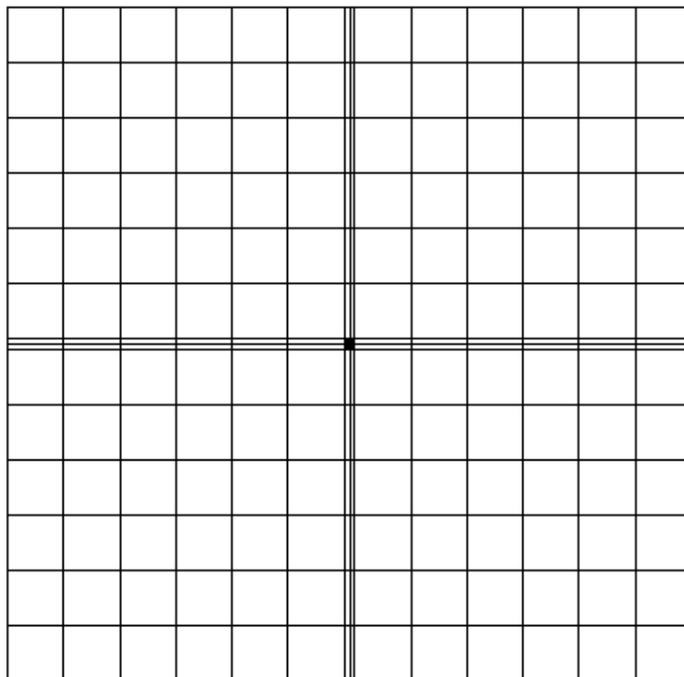


**Zoom de la pointe de fissure - Modélisation B**

## 3.1.2 Modélisations C et D

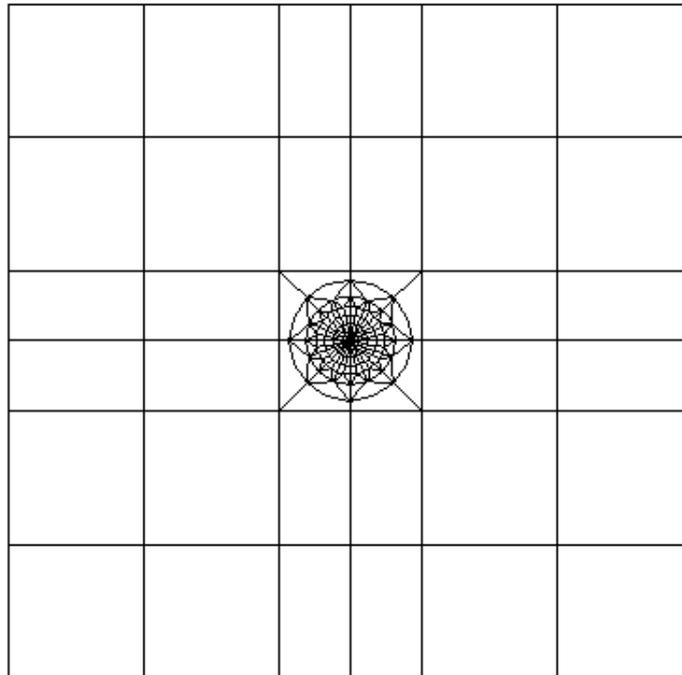


Maillage complet - Modélisation C

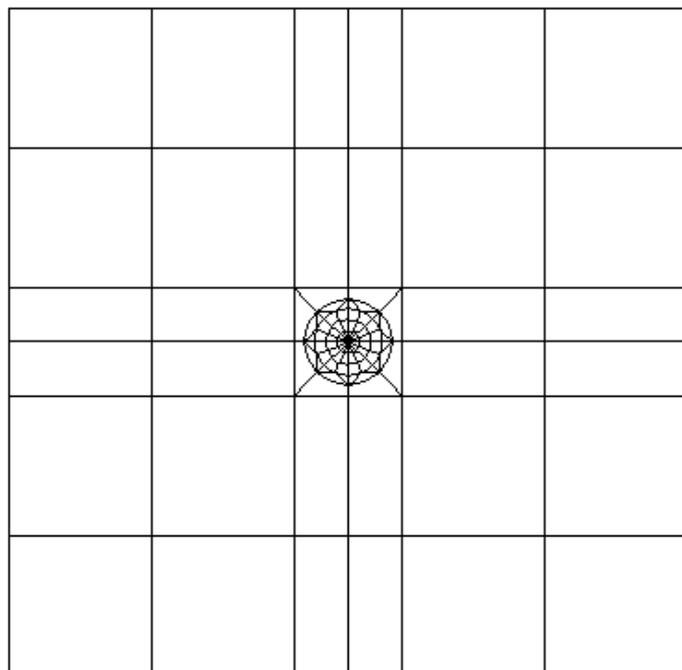


Maillage complet - Modélisation D

### 3.1.3 Modélisations E et F



**Maillage complet - Modélisation E**



**Maillage complet - Modélisation F**

## 3.1.4 Définition des rayons des couronnes

Pour ces différents cas, nous définissons les valeurs des rayons supérieurs et inférieurs, à préciser dans la commande `CALC_G` :

### Modélisation A

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf(m)$	3,75E-5	7,500E-5	1,125E-4	1,500E-4
$rsup(m)$	7,50E-5	1,125E-4	1,500E-4	1,875E-4

### Modélisation B

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf(m)$	5,00E-5	1,00E-4	1,50E-4
$rsup(m)$	1,00E-4	1,50E-4	2,00E-4

### Modélisation C

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf(m)$	3,75E-4	7,500E-4	1,125E-3	1,500E-3
$rsup(m)$	7,50E-4	1,125E-3	1,500E-3	1,875E-3

### Modélisation D

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf(m)$	5,00E-4	1,00E-3	1,50E-3
$rsup(m)$	1,00E-3	1,50E-3	2,00E-3

### Modélisation E

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne	4 ième couronne
$rinf(m)$	3,75E-3	7,500E-3	1,125E-2	1,500E-2
$rsup(m)$	7,50E-3	1,125E-2	1,500E-2	1,875E-2

### Modélisation F

	1 ère couronne	2 ième couronne	3 ième couronne
$rinf(m)$	5,00E-3	1,00E-2	1,50E-2
$rsup(m)$	1,00E-2	1,50E-2	2,00E-2

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Demi-maillage; maillage rayonnant à l'extrémité droite de la fissure.

Le tableau ci-dessous donne la constitution des maillages étudiés :

	$NS=8$ , $NC=4$	$NS=4$ , $NC=3$
$rt=0,001*a$	3831 nœuds, 1516 éléments, 884 TRI6, 632 QUA8.	3507 nœuds, 1388 éléments, 820 TRI6, 568 QUA8.
$rt=0,01*a$	1179 nœuds, 400 éléments, 104 TRI6, 296 QUA8.	855 nœuds, 272 éléments, 40 TRI6, 232 QUA8.
$rt=0,1*a$	659 nœuds, 240 éléments, 104 TRI6, 136 QUA8.	335 nœuds, 112 éléments, 40 TRI6, 72 QUA8.

## 4 Résultats des modélisations A, B, C, D, E et F

### 4.1 Valeurs testées

Identification		Référence	Aster	% différence
<b>Diamètre couronne extérieure =</b>				
0,001 * a				
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 8	NC = 4	<b>Modélisation A</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,2813E7	2,08
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
$K_{II}$	, couronne n°4	2,2347E+7	2,2814E7	2,09
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 4	NC = 3	<b>Modélisation B</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,282E7	2,10
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,282E7	2,10
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,281E7	2,09
<b>Diamètre couronne extérieure =</b>				
0,01 * a				
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 8	NC = 4	<b>Modélisation C</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,166 10 <sup>7</sup>	3,058
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
$K_{II}$	, couronne n°4	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 4	NC = 3	<b>Modélisation D</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,214 10 <sup>7</sup>	0,919
<b>Diamètre couronne extérieure = 0,1 * a</b>				
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 8	NC = 4	<b>Modélisation E</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,2632 10 <sup>7</sup>	1,276
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,2572 10 <sup>7</sup>	1,009
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,2572 10 <sup>7</sup>	1,008
$K_{II}$	, couronne n°4	2,2347E+7	2,2564 10 <sup>7</sup>	0,972
<b>Maillage rayonnant</b>		NS = 4	NC = 3	<b>Modélisation F</b>
$K_{II}$	, couronne n°1	2,2347E+7	2,255E7	0,932
$K_{II}$	, couronne n°2	2,2347E+7	2,2568E7	0,988
$K_{II}$	, couronne n°3	2,2347E+7	2,2568E7	0,987

Identification		Référence	Aster	% différence
<b>Diamètre couronne extérieure =</b> 0,001*a				
<b>Maillage rayonnant</b>		<i>NS</i> = 8	<i>NC</i> = 4	<b>Modélisation A</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,5984E+3	4,07
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,5990E+3	4,09
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,5992E+3	4,10
<i>G</i> , couronne n°4		2,4969E+3	2,5993E+3	4,10
<b>Maillage rayonnant</b>		<i>NS</i> = 4	<i>NC</i> = 3	<b>Modélisation B</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,600 10 <sup>3</sup>	4,134
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,5996 10 <sup>3</sup>	4,114
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,5996 10 <sup>3</sup>	4,111
<b>Diamètre couronne extérieure =</b> 0,01*a				
<b>Maillage rayonnant</b>		<i>NS</i> = 8	<i>NC</i> = 4	<b>Modélisation C</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,451 10 <sup>3</sup>	1,842
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<i>G</i> , couronne n°4		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<b>Maillage rayonnant</b>		<b>NS= 4</b>	<b>NC= 3</b>	<b>Modélisation D</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,475 10 <sup>3</sup>	0,858
<b>Diamètre couronne extérieure =</b> 0,1*a				
<b>Maillage rayonnant</b>		<b>NS= 8</b>	<b>NC= 4</b>	<b>Modélisation E</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,5624E3	2,627
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,5503E3	2,139
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,5499E3	2,124
<i>G</i> , couronne n°4		2,4969E+3	2,5489 E3	2,084
<b>Maillage rayonnant</b>		<b>NS= 4</b>	<b>NC= 3</b>	<b>Modélisation F</b>
<i>G</i> , couronne n°1		2,4969E+3	2,5470 E3	2,006
<i>G</i> , couronne n°2		2,4969E+3	2,5497 E3	2,117
<i>G</i> , couronne n°3		2,4969E+3	2,5491 E3	2,094

## 4.2 Remarques

Dans la référence, l'auteur suppose que  $KI=0$  , mais il ne le vérifie pas a posteriori.

En ce qui concerne le taux de restitution d'énergie  $G$  , si nous supposons que  $KI=0$  , nous tirons la valeur de référence à partir de la formule d'IRWIN en contraintes planes :

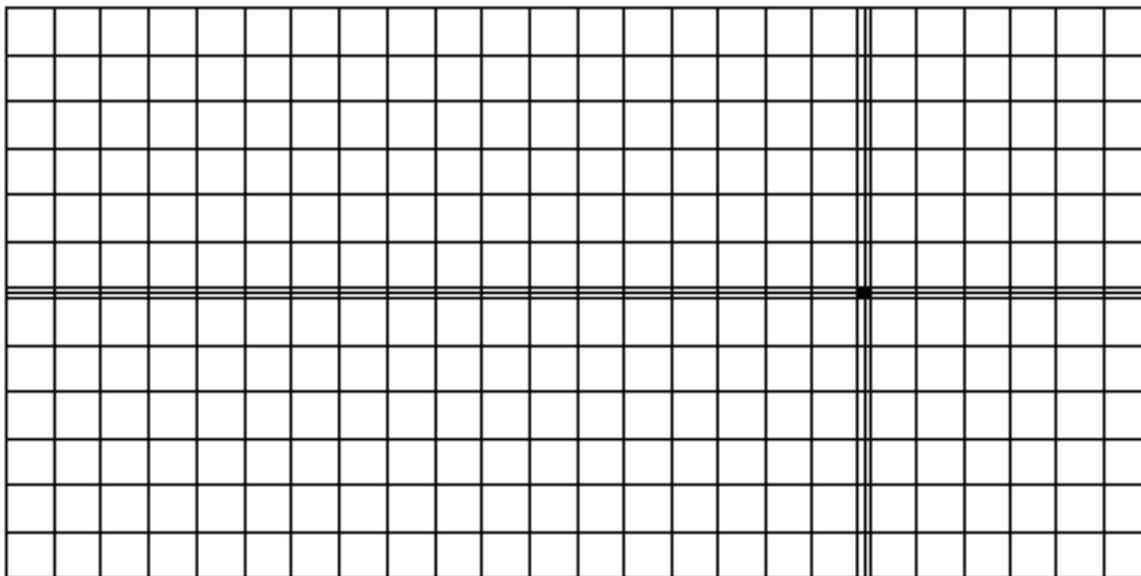
$$G_{ref} = (1/E) * KI^2$$

## 5 Modélisation G

### 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, nous utilisons le modèle complet avec les meilleurs paramètres  $NS$ ,  $NC$  et  $rt$  calculés dans les modélisations précédentes. Nous avons donc utilisé les valeurs suivantes :

- $NS = 8$ ,
- $NC = 4$ ,
- $rt = 0,01 * a$ .



Maillage complet

### 5.2 Caractéristiques du maillage

Modèle complet, avec maillage rayonnant seulement à l'extrémité droite de la fissure et maillage régulier, non raffiné, à l'extrémité gauche.

Le maillage est constitué de 1718 nœuds et 568 éléments, dont 464 éléments `QUA8` et 104 éléments `TRI6`.

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	Aster	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,01 * a$			
Maillage rayonnant	$NS = 8$	$NC = 4$	
$K_{II}$ , couronne n°1	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
$K_{II}$ , couronne n°2	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
$K_{II}$ , couronne n°3	2,2347E+7	2,2640E7	1,31
$K_{II}$ , couronne n°4	2,2347E+7	2,2641E7	1,31

Identification	Référence	Aster	% différence
Diamètre couronne extérieure = $0,01 * a$			
Maillage rayonnant	$NS = 8$	$NC = 4$	
$G$ , couronne n°1	2,4969E+3	2,5620E3	2,610
$G$ , couronne n°2	2,4969E+3	2,5626E3	2,631
$G$ , couronne n°3	2,4969E+3	2,5627E3	2,635
$G$ , couronne n°4	2,4969E+3	2,5628E3	2,640

## 6 Synthèse des résultats

---

Les écarts entre la solution de référence et les résultats de *Code\_Aster* ne dépassent pas 3% sur les coefficients d'intensité de contraintes et 4% pour le taux de restitution d'énergie. On vérifie l'invariance des résultats par rapport aux différentes couronnes d'intégration.