

HSNV103 - Thermo-plasticité et métallurgie en déformations planes

Résumé :

On traite la détermination de l'évolution mécanique d'un parallépipède rectangle en déformations planes soumis à des évolutions thermique $T(t)$ et métallurgique $Z(t)$ connues et uniformes (la transformation métallurgique est de type bainitique).

Les éléments utilisés sont des éléments bidimensionnels en déformations planes et la relation de comportement est la plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope linéaire (pour la modélisation B, on tient également compte de la plasticité de transformation).

La limite élastique et la pente de la courbe de traction dépendent de la température et de la composition métallurgique.

Le coefficient de dilatation α dépend de la composition métallurgique.

Pour la modélisation A (sans plasticité de transformation), la solution de référence est obtenue par la résolution analytique du problème. Pour la modélisation B (avec plasticité de transformation), la solution de référence est obtenue par la résolution numérique du problème en utilisant des éléments axisymétriques pour lesquels on impose la condition de déformations planes.

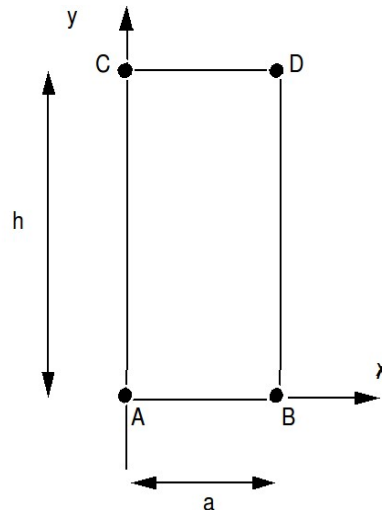
Les résultats fournis par *Code_Aster* sont très satisfaisants avec des erreurs inférieures à 0,5 %.

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Largeur : $a = 0.05 \text{ m}$

Hauteur : $h = 0.2 \text{ m}$



1.2 Propriétés des matériaux

La convention suivante est adoptée afin de distinguer les paramètres de la phase chaude (austénitique) des paramètres des phases froides (ferrito-perlitique, bainitique et martensitique) :

- **aust* = caractéristiques relatives à la phase austénitique
- **fbm* = caractéristiques relatives aux phases ferrito-perlitique, bainitique et martensitique

Paramètres métallurgiques :

TRC pour modéliser une évolution métallurgique de type bainitique, sur toute la structure, de la forme :

$$Z_{fbm} = \begin{cases} 0. & \text{si } t \leq \tau_1 & \tau_1 = 60 \text{ s} \\ \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 & \tau_2 = 112 \text{ s} \\ 1. & \text{si } t \geq \tau_2 \end{cases}$$

Paramètres thermiques :

Capacité calorifique : $\rho C_p = 2.10^6 \text{ J.m}^{-3} . ^\circ\text{C}^{-1}$

Conductivité : $\lambda = 9999.9 \text{ W.m}^{-1} . ^\circ\text{C}^{-1}$

Paramètres thermo-mécaniques :

- Paramètres thermo-élastiques :

Module d'Young $E = 200000 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Coefficients de dilatation thermique

$$\alpha_{fbm} = 15.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\alpha_{aust} = 23.510^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Température de définition du coefficient de dilatation : $T_{ref} = 900 \text{ } ^\circ\text{C}$

État de déformation thermique de référence : $\Delta \varepsilon_{fy}^{T_{ref}} = 2.5210^{-3}$

Limite d'élasticité :

$$\sigma_y^{fbm} = \sigma_0^{fbm} + s^{fbm} (T - T^0) \text{ avec } \sigma_0^{fbm} = 530.10^6 \text{ Pa et } s^{fbm} = 0.510^6 \text{ Pa. } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\sigma_y^{aust} = \sigma_0^{aust} + s^{aust} (T - T^0) \text{ avec } \sigma_0^{aust} = 400.10^6 \text{ Pa et } s^{aust} = 0.510^6 \text{ Pa. } ^\circ\text{C}^{-1}$$

- Paramètres thermo-plastiques (loi avec écrouissage linéaire)

Modules tangents : E_T^{fbm} et E_T^{aust} sont choisis tel que :

$$H^{fbm} = H_0^{fbm} + \lambda^{fbm} (T - T^0) \text{ avec } H_0^{fbm} = -50.10^6 \text{ Pa et } \lambda^{fbm} = -5.10^6 \text{ Pa. } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$H^{aust} = H_0^{aust} + \lambda^{aust} (T - T^0) \text{ avec } H_0^{aust} = 1250.10^6 \text{ Pa et } \lambda^{aust} = -5.10^6 \text{ Pa. } ^\circ\text{C}^{-1}$$

On rappelle que
$$H = \frac{EE_T}{E - E_T}$$

- Paramètres pour la plasticité de transformation :

Rappel :

Dans le cas d'une évolution métallurgique de type bainitique, le modèle de la plasticité de transformation est le suivant :

$$\dot{\varepsilon}^{pt} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma} k^{fbm} F'(Z_{fbm}) \dot{Z}_{fbm}$$

Paramètres du modèle : $k^{fbm} = 1.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $F'(Z_{fbm}) = 2(1 - Z_{fbm})$

1.3 Conditions aux limites et chargements

- $u_y = 0$ sur le côté AB ; $u_x = 0$ en A .
- $T = T^0 + \mu t$, $\mu = -5 \text{ } ^\circ\text{C.s}^{-1}$ sur toute la structure.

Notations : $T(\tau_1) = T_1$
 $T(\tau_2) = T_2$

- Le chargement sur la structure est dû aux phénomènes de dilatation thermique et métallurgique contraints dans la direction z par la condition de déformations planes.

1.4 Conditions initiales

$$T^0 = 900 \text{ } ^\circ\text{C} = T^{ref}$$

2 Solution de référence (pour la modélisation A)

2.1 Forme du champ solution

Le champ de contrainte solution $\sigma(t)$ est de la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_o(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit la forme suivante du tenseur des déformations élastiques :

$$\epsilon^e(t) = \frac{\sigma_o(t)}{E} \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus, étant donné que $\sigma(t)$ garde une direction constante, on a :

$$\epsilon^p(t) = \epsilon_o^p(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \epsilon^{pt}(t) = \epsilon_o^{pt}(t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ϵ^p et ϵ^{pt} sont respectivement le tenseur des déformations plastiques et le tenseur des déformations dues à la plasticité de transformation métallurgique.

2.2 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Avant transformation, solution thermo-élastique pour $t < t_1$.

$$\begin{cases} \epsilon_{zz}(t) = \epsilon_{zz}^e(t) + \epsilon_{zz}^{th}(t) = 0 \\ \epsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{aust}(T - T^0) \\ \sigma_{zz}(t) = -E \epsilon_{zz}^{th}(t) \end{cases}$$

La limite élastique est atteinte pour $t = t_1$ tel que :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t_1) = -E \epsilon_{zz}^{th}(t_1) = \sigma_y^{aust}(t_1) &\Leftrightarrow T(t_1) - T^0 = \frac{-\sigma_0^{aust}}{E \alpha_{aust} + s^{aust}} \simeq -76.92 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \Rightarrow t_1 = \frac{T(t_1) - T^0}{\mu} &\simeq 15.38 \text{ s} \end{aligned}$$

Avant transformation, solution thermo-élasto-plastique, $t_1 \leq t \leq \tau_1$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{aust}(T - T^0) \\ \varepsilon_{zz}^p(t) = \frac{-\sigma_y^{aust}(T) - E \alpha_{aust}(T - T^0)}{E + H^{aust}(T)} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \end{cases}$$

Pendant la transformation, solution thermo-élasto-plastique avec changement de phase, $\tau_1 \leq t < \tau_2$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = Z_{aust} \alpha_{aust}(T - T^0) + Z_{fbm} (\alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}) \\ \varepsilon_{zz}^p(t) = \frac{-\sigma_y^{moy}(T) - E \varepsilon_{zz}^{th}(t)}{E + H^{moy}(T)} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \end{cases}$$

$$\text{avec } \sigma_y^{moy} = Z_{aust} \sigma_y^{aust} + Z_{fbm} \sigma_y^{fbm} \text{ et } H^{moy} = Z_{aust} H^{aust} + Z_{fbm} H^{fbm}$$

On a une solution thermo-élasto-plastique tant qu'on reste en charge, c'est-à-dire tant que $\dot{\varepsilon}^{th} < 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{th} < 0 &\Leftrightarrow T = \frac{(\alpha_{fbm} - \alpha_{aust}) T^0 - \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} + \alpha_{fbm} T_1 - \alpha_{aust} T_2}{2(\alpha_{fbm} - \alpha_{aust})} > 538.82^\circ \text{C} \\ &\Leftrightarrow t < t_2 = 72.23 \text{ s} \end{aligned}$$

Pour $t \geq t_2$, la solution est thermo-élastique.

Pendant la transformation, solution thermo-élastique avec changement de phase, $t_2 \leq t < \tau_2$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t_2) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = Z_{aust} \alpha_{aust}(T - T^0) + Z_{fbm} (\alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}}) \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^p(t_2) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \end{cases}$$

Après la transformation, solution thermo-élastique pour $\tau_2 < t < \tau_3$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t_2) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{fbm}(T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \\ \sigma_{zz}(t) = -E(\varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t_2)) \end{cases}$$

La limite élastique est atteinte pour $t = t_3$ tel que :

$$\sigma_{zz}(t_3) = -E(\varepsilon_{zz}^{th}(t_3) + \varepsilon_{zz}^p(t_2)) = H^{fbm} \varepsilon_{zz}^p(t_2) + \sigma_y^{fbm}(t_3)$$

$$\Leftrightarrow T(t_3) - T^0 = - \frac{E (\Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} + \varepsilon_{zz}^p(t_2)) + H_0^{fbm} \varepsilon_{zz}^p(t_2) + \sigma_0^{fbm}}{E \alpha_{fbm} + S^{fbm} + \lambda^{fbm} \varepsilon_{zz}^p(t_2)} = -634,68^\circ C$$

$$\Leftrightarrow t_3 = \frac{T(t_3) - T^0}{\mu} = 126.94 s$$

Après la transformation, solution thermo-élasto-plastique pour $t \geq t_3$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}^e(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t) + \varepsilon_{zz}^p(t) = 0 \\ \varepsilon_{zz}^{th}(t) = \alpha_{fbm} (T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} \\ \varepsilon_{zz}^p(t) = \frac{-\sigma_y^{fbm}(T) - E (\alpha_{fbm} (T - T^0) + \Delta \varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}})}{E + H^{fbm}(T)} \\ \sigma_{zz}(t) = -E (\varepsilon_{zz}^p(t) + \varepsilon_{zz}^{th}(t)) \end{cases}$$

2.3 Résultats de référence

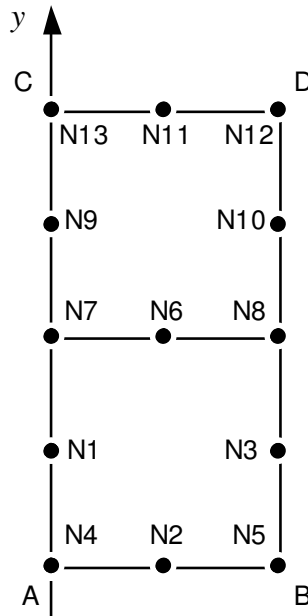
À $t=16 s$:	χ	p	ε_{xx}	σ_{zz}	ε_{xx}^{th}	ε_{xx}^{meca}	ε_{xx}^{plas}
À $t=60 s$:	χ	p	ε_{xx}	σ_{zz}	ε_{xx}^{th}	ε_{xx}^{meca}	ε_{xx}^{plas}
À $t=72 s$:	χ	p					
À $t=112 s$:	χ	p		σ_{zz}	ε_{xx}^{th}	ε_{xx}^{meca}	ε_{xx}^{plas}
À $t=176 s$:	χ		ε_{xx}	σ_{zz}			

2.4 Bibliographie

- 1) DONORE A.M. - WAECKEL F. - Influence des transformations structurales dans les lois de comportement élasto-plastiques Note HI-74/93/024.

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



$A = N4$, $B = N5$, $C = N13$, $D = N12$.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 13.

Nombre de mailles et types : 2 mailles QUAD8, 6 mailles SEG3.

4 Résultats de la modélisation A

4.1 Valeurs testées

On teste les paramètres de la structure de données résultats :

Identification		Référence		
INST pour NUME_ORDRE= 176		176,0		
ITER_GLOB pour NUME_ORDRE=176		2		

Identification	Référence	Test	Tolérance
ε_{xx} $t=16 s$	$-2.4599 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
χ $t=16 s$	1	ANALYTIQUE	0.1 %
σ $t=16 s$	$360.13 \cdot 10^6$	ANALYTIQUE	0.1 %
p $t=16 s$	$7.9345 \cdot 10^{-5}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{th} $t=16 s$	$-1.88 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{meca} $t=16 s$	$-5.799 \cdot 10^{-4}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{plas} $t=16 s$	$3.9672 \cdot 10^{-5}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx} $t=60 s$	$-1.0309 \cdot 10^{-2}$	ANALYTIQUE	0.1 %
p $t=60 s$	$5.7213 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
σ $t=60 s$	$265.73 \cdot 10^6$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{th} $t=60 s$	$-7.05 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{meca} $t=60 s$	$-3.259 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{plas} $t=60 s$	$2.86065 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
p $t=72 s$	$5.8420 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.5 %
χ $t=112 s$	0	ANALYTIQUE	0.1 %
σ $t=112 s$	$12.82 \cdot 10^6$	ANALYTIQUE	0.5 %
p $t=112 s$	$5.8421 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.5 %
ε_{xx}^{th} $t=112 s$	$-5.88 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.1 %
ε_{xx}^{meca} $t=112 s$	$-2.90182 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	1.0 %
ε_{xx}^{plas} $t=112 s$	$-2.92105 \cdot 10^{-3}$	ANALYTIQUE	0.5 %
ε_{xx} $t=176 s$	$-1.5886 \cdot 10^{-2}$	ANALYTIQUE	0.1 %
χ $t=176 s$	1	ANALYTIQUE	0.1 %
σ $t=176 s$	$133.55 \cdot 10^6$	ANALYTIQUE	0.1 %

4.2 Remarques

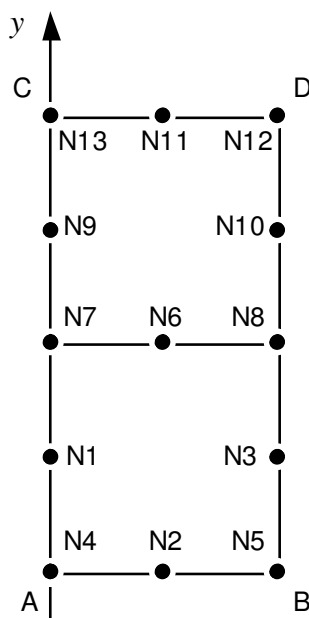
Dans cette modélisation :

$$\varepsilon_{zz}^{pl}(T, Z)=0$$

L'erreur sur la déformation plastique cumulée à 72 secondes provient en fait de l'erreur commise sur la description numérique de la transformation métallurgique qui est, à cet instant, d'environ 0,5%.

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation



$$A=N4, B=N5, C=N13, D=N12.$$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 13.

Nombre de mailles et types : 2 mailles QUAD8, 6 mailles SEG3.

6 Résultats de la modélisation B

6.1 Valeurs testées

Identification	Référence	Test	Tolérance
ε_{yy} $t=60\text{ s}$	$-1.0309 \cdot 10^{-2}$	AUTRE_ASTER	0.02 %
σ_{zz} $t=60\text{ s}$	$265.73 \cdot 10^6$	AUTRE_ASTER	0.002 %
p $t=60\text{ s}$	$5.7213 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.1 %
ε_{yy}^{th} $t=60\text{ s}$	$-7.05 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.1 %
ε_{yy}^{meca} $t=60\text{ s}$	$-3.2593 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy}^{plas} $t=60\text{ s}$	$-2.8607 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy} $t=89\text{ s}$	$-1.0325 \cdot 10^{-2}$	AUTRE_ASTER	0.02 %
p $t=89\text{ s}$	$5.7213 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.001 %
σ_{zz} $t=89\text{ s}$	$-13.545 \cdot 10^6$	AUTRE_ASTER	0.04 %
ε_{yy}^{th} $t=89\text{ s}$	$-6.8751 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.1 %
ε_{yy}^{meca} $t=89\text{ s}$	$-3.4511 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy}^{plas} $t=89\text{ s}$	$-3.4714 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy} $t=112\text{ s}$	$-8.9197 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.02 %
σ_{zz} $t=112\text{ s}$	$101.39 \cdot 10^6$	AUTRE_ASTER	0.05 %
p $t=112\text{ s}$	$5.7213 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.001 %
ε_{yy}^{th} $t=112\text{ s}$	$-5.8800 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.1 %
ε_{yy}^{meca} $t=112\text{ s}$	$-3.0413 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy}^{plas} $t=112\text{ s}$	$-3.1934 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy} $t=176\text{ s}$	$-1.5884 \cdot 10^{-2}$	AUTRE_ASTER	0.04 %
p $t=176\text{ s}$	$9.3610 \cdot 10^{-2}$	AUTRE_ASTER	0.001 %
σ_{zz} $t=176\text{ s}$	$130.72 \cdot 10^6$	AUTRE_ASTER	0.001 %
ε_{yy}^{th} $t=176\text{ s}$	$-1.068 \cdot 10^{-2}$	AUTRE_ASTER	0.1 %
ε_{yy}^{meca} $t=176\text{ s}$	$-5.2093 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %
ε_{yy}^{plas} $t=176\text{ s}$	$-5.0132 \cdot 10^{-3}$	AUTRE_ASTER	0.002 %

6.2 Remarques

Dans cette modélisation, on prend en compte le terme dû à la plasticité de transformation :

$$\dot{\varepsilon}^{pt}(Z, T) \neq 0 \text{ lorsque } \dot{Z} \neq 0$$

La solution de référence est obtenue par la résolution numérique du problème avec des éléments axisymétriques pour lesquels on impose la condition de déformations planes.

7 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés avec *Code_Aster* sont très satisfaisants, avec des pourcentages d'erreur inférieurs à 0.5%.